Université Claude Bernard Lyon 1 **Préparation Agrégation Interne**
Feuille 2 (niveau 1, analyse) **Année 2010-11**

Bornes supérieures et inférieures.
Suites numériques I.

---

1 Bornes supérieures et inférieures

Exercice 1.1 *(a) Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. Rappeler les définitions suivantes :*

(i) majorants/minorants de X.

(ii) borne supérieure/borne inférieure de X.

(iii) plus grand/plus petit élément (ou maximum/minimum) de X.

(b) Déterminer s'ils existent la borne supérieure et le maximum de X dans les cas suivants :

(i) $X = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) $X = [0, 1[\cap \mathbb{Q}$.

(iii) $X = \{(-1)^n + 1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$.

(c) Même question avec la borne inférieure et le minimum.

Exercice 1.2 *Montrer que pour tous réels a et b, on a*

$$\max(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|b-a|}{2} \quad et \quad \min(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|b-a|}{2}.$$

En déduire que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $\max(f, g)$ *et* $\min(f, g)$ *sont aussi continues sur I.*

Exercice 1.3 *Soient A, B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que*

(i) $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

(ii) $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B)$.

(iii) Si $A \subset B$, alors $\inf(B) \leq \inf(A)$ *et* $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 1.4 *Soient A, B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble*

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

Montrer que $A + B$ est majorée et

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Exercice 1.5 *Montrer que si A est une partie fermée, non vide et majorée de $\mathbb{R}$, alors* $\sup(A) \in A$.

Exercice 1.6 (Existence de la racine carrée) *En n'utilisant que le théorème de la borne supérieure et inférieure, montrer l'existence et l'unicité d'une racine carrée dans $\mathbb{R}_+$.*

Indication : *poser $A := \{y \in \mathbb{R}_+ : y^2 \leq x\}$ et $B := \{y \in \mathbb{R}_+ : y^2 \geq x\}$. En justifiant leur existence, on considérera alors $M = \sup A$ et $m = \inf B$ et on montrera que $M^2 = m^2 = x$.*

Exercice 1.7 (Une utilisation de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) *On désigne par f une fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

(a) Montrer que f est impaire.

(b) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a $f(na) = nf(a)$.

(c) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $f(ra) = rf(a)$.

(d) Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f(x) = \lambda x$, pour tout réel x.
Indication : *étant donné un réel x, on considéra deux suites de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers x avec $r_n < x < s_n$, pour tout n.*

(e) Montrer que l'identité est l'unique fonction non identiquement nulle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$, pour tous réels x, y.
Indication : *on montrera que $f(1) = 1$, que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et que f est croissante.*

2 Suites convergentes ou divergentes

Exercice 2.1 *(a) Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(b) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0, \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

(c) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > |\lambda|$. Montrer que

$$0 \leq \left|\frac{\lambda^n}{n!}\right| \leq \left|\frac{\lambda^{n_0}}{n_0!}\right| \frac{|\lambda|}{n},$$

pour tout $n > n_0$. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 0.$$

Exercice 2.2 *Montrer que si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$. *Que pensez-vous de la réciproque ?*

Indication : *pour la réciproque, on pourra séparer le cas* $\ell = 0$ *et* $\ell \neq 0$. *Pour* $\ell \neq 0$, *on pourra étudier le cas de la suite* $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.3 *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *et soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite définie par*

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx],$$

où $[\cdot]$ *désigne la partie entière.*

(a) Montrer que

$$0 \leq \frac{n+1}{2n}x - u_n < \frac{1}{n}.$$

Indication : *on utilisera que* $[u] \leq u < [u]+1$, *pour tout* $u \in \mathbb{R}$.

(b) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{x}{2}.$$

Exercice 2.4 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{Z}$. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si elle est stationnaire.*

Indication : *utiliser la définition de la convergence avec* $\varepsilon = 1/2$.

Exercice 2.5 *(a) Montrer que si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, *alors* $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

(b) En considérant la suite $u_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, *étudier la réciproque.*

Exercice 2.6 *Soit* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle ou complexe.*

(a) On suppose dans cette question qu'il existe un réel $\lambda \in [0,1[$ *tel que*

$$|u_{n+1}| \leq \lambda |u_n|,$$

à partir d'un certain rang n_0.

(i) Montrer par récurrence que

$$|u_n| \leq |u_{n_0}|\lambda^{n-n_0},$$

pour tout $n \geq n_0$.

(ii) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(b) On suppose dans cette question qu'il existe un indice n_0 *tel que* $u_{n_0} \neq 0$ *et qu'il existe un réel* $\lambda > 1$ *tel que*

$$|u_{n+1}| \geq \lambda |u_n|,$$

pour tout $n \geq n_0$.

(i) Montrer par récurrence que $u_n \neq 0$*, pour tout* $n \geq n_0$*.*

(ii) En appliquant le résultat de la question (a), en déduire que $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$*.*

(c) Montrer que si $u_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lambda \in [0,1[,$$

alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$*.*

Indication : *étant donné* β *tel que* $\lambda < \beta < 1$*, on pourra montrer que* $|u_{n+1}| \leq \beta|u_n|$*, à partir d'un certain rang et appliquer le résultat de la question (a).*

(d) Montrer que si $u_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lambda > 1,$$

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

(e) Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n \neq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

(f) Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n \neq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

(g) Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n \neq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 10.$$

Exercice 2.7 *En utilisant l'exercice 2.6 (c), montrer que la suite* $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$*,* $n \geq 1$*, est convergente vers 0.*