
Suites numériques II

---

1 Suites de Cauchy

Exercice 1.1 (Une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ non convergente) *(a) Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $|r_{n+1}-r_n| \leq \lambda^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où λ est un réel strictement compris entre 0 et 1. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.*

Indication : *on pourra écrire, pour $m > n$, $r_m - r_n = \sum_{k=n}^{m-1}(r_{k+1} - r_k)$.*

(b) Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $r_0 = 2$ et $r_{n+1} = 1 + 1/r_n$, $n \geq 0$. Montrer que $(r_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Conclusion ?

Exercice 1.2 (Irrationalité de e) *Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par*

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(a) Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{Q}$.

(b) Montrer que, pour tout $m > n > 2$, on a

$$|r_m - r_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\right).$$

(c) En déduire que, pour tout $m > n > 2$, on a

$$|r_m - r_n| \leq \frac{1}{n}.$$

Indication : *on pourra utiliser que $\frac{n+2}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{2}$.*

(d) En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc qu'elle converge dans $\mathbb{R}$. On notera e sa limite.

(e) Supposons que $e \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'il existe p, q deux entiers premiers entre eux (strictement positifs) tels que $e = p/q$.

(i) Montrer que pour tout $n > q$, le nombre $p_n = n!(e - r_n)$ est un entier strictement positif.

(ii) *Montrer que* $0 < p_n < 1$.

Indication : *on pourra écrire que* $p_n = \lim_{m\to+\infty}(n!(r_m - r_n))$.

(f) *Conclure que e est irrationnel.*

Exercice 1.3 *Pour tout nombre complexe* z *et tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit*

$$u_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \quad \text{et} \quad v_n(z) := \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k}.$$

(i) *Montrer que, pour tout nombre complexe* z, *la suite* $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente. La limite de cette suite est (par définition) l'exponentielle complexe de* z, *notée* $\exp(z)$.

(ii) *Montrer que, pour tout nombre complexe* z *tel que* $|z| < 1$, *la suite* $(v_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

2 Valeurs d'adhérence

On rappelle qu'un réel ℓ est une *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ. Rappelons le

Théorème 2.1 (Bolzano–Weierstrass) *De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une sous-suite convergente. Autrement dit, toute suite bornée de nombres réels possède (au moins) une valeur d'adhérence.*

Exercice 2.1 *Montrer que si*

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell_2,$$

alors les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont* ℓ_1 *et* ℓ_2.

Exercice 2.2 *Calculer les valeurs d'adhérence de*

$$u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 2.3 *Soit* $u_n := n^{(-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) *En considérant* u_{2n+1}, *montrer que* 0 *est une valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) *Soit* ℓ *une valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Montrer que* $\ell = 0$.

Indication : *on pourra raisonner par l'absurde et considérer* $\ln(u_{\varphi(n)})$.

(iii) *En déduire que* 0 *est l'unique valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iv) *Peut-on conclure à la convergence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *?*

Indication : *considérer* u_{2n}.

Exercice 2.4 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle ou complexe telles que les deux suites extraites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes. A quelle condition la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est-elle convergente ?*

Exercice 2.5 *Montrer que si* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite complexe telle que les trois suites extraites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes, alors* u *est convergente.*

Exercice 2.6 *Le but de l'exercice est de montrer que si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite réelle, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

(ii) *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.*

(a) *Montrer que* (i) $\Longrightarrow$ (ii).

(b) *On suppose dans cette question que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et admet* ℓ *pour seule valeur d'adhérence. On suppose de plus que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas vers* ℓ.

(b1) *Montrer qu'il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *et une suite strictement croissante d'entiers* $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$|u_{\varphi(n)} - \ell| \geq \varepsilon, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(b2) *En utilisant le théorème de Bolzano–Weierstrass, conclure que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une deuxième valeur d'adhérence, distincte de* ℓ.

(b3) *En déduire que* (ii) $\Longrightarrow$ (i).

3 Suites monotones

Exercice 3.1 *Soit* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n), \qquad n \geq 1.$$

(i) *Montrer que* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante.*

Indication : *on pourra calculer l'intégrale*

$$\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \right) dt,$$

et l'exprimer en fonction de $u_{n+1} - u_n$.

(ii) *Montrer que* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est minorée par* 0.

Indication : *on montrera d'abord que, pour tout* $k \geq 1$, *on a*

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k},$$

puis que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log(n+1).$$

(iii) *En déduire que* $(u_n)_{n\geq 1}$ *converge. On note* γ *sa limite qui s'appelle* la constante d'Euler.

Exercice 3.2 *On désigne par* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites respectivement définies par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \quad et \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

(i) *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $v_{2n} = u_{2n} - u_n + \log(2)$.

(ii) *En utilisant l'exercice 3.1, montrer que* $\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \log(2)$, *et en déduire que*

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \log(2).$$

4 Suites adjacentes

Exercice 4.1 *Soient*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad et \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

(i) *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

(ii) *Conclure que les deux suites sont adjacentes.*

(iii) *Soit* e *la limite commune de ces deux suites. En calculant* u_{10} *et* v_{10}, *donner une valeur approchée de* e, *en précisant l'erreur d'approximation.*

Exercice 4.2 *Montrer que les suites* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n), \quad et \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1),$$

convergent vers la même limite γ.

Indication : *on pourra utiliser et s'inspirer de l'exercice 3.1.*

Exercice 4.3 *Soient* $0 < a < b$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par* $u_0 = a$, $v_0 = b$ *et*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}} & \textit{(moyenne harmonique)} \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} & \textit{(moyenne arithmétique).} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont deux suites adjacentes, de limite* $\sqrt{ab}$.

(i) Montrer, par récurrence que $u_n > 0$ *et* $v_n > 0$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Montrer que $u_n - v_n \leq 0$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et en déduire que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

(iii) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

(iv) Vérifier, par récurrence que

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{b-a}{2^n},$$

et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont deux suites adjacentes.*

(v) Montrer qu'elles convergent vers $\sqrt{ab}$.

(vi) Donner une valeur approchée de $\sqrt{2}$ *à* 10^{-4} *près.*

Exercice 4.4 *Le but de l'exercice est de donner une démonstration de la non dénombrabilité de* $\mathbb{R}$. *On raisonne par l'absurde, en supposant que* $[0,1]$ *est dénombrable. Autrement dit, il existe une bijection* $\varphi : \mathbb{N} \to [0,1]$.

(i) Construire, par récurrence une suite de segments emboîtés $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, I_n *ne contient pas* $\varphi(n)$ *et* I_n *est de longueur* 3^{-n}.

(ii) En déduire qu'il existe $x \in [0,1]$ *tel que*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\},$$

et $x \neq \varphi(n)$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Conclure que $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

5 Le théorème de Césaro

Exercice 5.1 (Le théorème de Césaro) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle (ou complexe) qui converge vers un nombre réel (ou complexe)* ℓ. *Soit* $(v_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par*

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k, \qquad n \geq 1.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ *converge aussi vers* ℓ *(on dit dans ce cas que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge au sens de Césaro vers* ℓ*). Que pensez-vous de la réciproque ?*

Indication : *pour la réciproque, on pourra étudier la suite* $u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$.

Exercice 5.2 *Montrer que si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite réelle ou complexe telle que* $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\ell$, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=\ell.$$

Indication : *on pourra calculer* $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$ *et appliquer le théorème de Césaro.*

Exercice 5.3 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique convergente au sens de Césaro vers* ℓ. *Supposons de plus que* $\lim_{n\to+\infty}(n(u_n-u_{n-1}))=0$. *Montrer alors que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ.

Indication : *on montrera que*

$$\sum_{k=1}^{n}k(u_k-u_{k-1})=nu_n-\sum_{k=0}^{n-1}u_k,$$

et on appliquera le théorème de Césaro à la suite $(n(u_n-u_{n-1}))_{n\geq 1}$.