Université Claude Bernard Lyon 1 **Préparation Agrégation Interne**
Feuille 4 (analyse) **Année 2011-12**

Autour du théorème de Rolle et des formules de Taylor

Exercice 1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes [1] :

(i) la fonction f est injective ;

(ii) la fonction f est strictement monotone.

Indication : on pourra considérer l'ensemble

$$K = \left\{(x, y) \in I^2 : x < y\right\}$$

et $g : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $g(x, y) = (x - y)(f(x) - f(y))$.

Exercice 2 (Théorème de Darboux) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Le but de l'exercice [2] est de montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

(a) Montrer $f'(I)$ est un intervalle si et seulement si pour tous éléments a et b de I et pour tout réel λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe un réel $c \in I$ tel que $f'(c) = \lambda$.

(b) On fixe maintenant a et b deux éléments de I tels que $a < b$ et soit λ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On veut montrer qu'il existe un réel $c \in I$ tel que $f'(c) = \lambda$.

  (i) Montrer qu'on peut supposer que $f'(a) \neq f'(b)$.

  (ii) On définit alors $g(x) = f(x) - \lambda x$. Montrer que g n'est pas monotone sur $[a, b]$ et en déduire que g n'est pas injective.

  (iii) En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

  (iv) Conclure.

Exercice 3 (Inégalités de Kolmogorov) Soient n un entier, $n \geq 2$, et f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^n. Pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, on note

$$M_k := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(t)|.$$

On remarque que $M_k \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. On suppose que M_0 et M_n ont des valeurs **finies**.

1. On trouvera d'autres démonstrations dans J.E. Rombaldi, page 61
2. On trouvera deux autres méthodes dans X. Gourdon, page 47 et 78.

(a) Montrer que, pour tout entier k, $0 < k < n$, M_k a une valeur finie.
Indication : fixer $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n, à la fonction f sur l'intervalle $[x, x+i]$. Introduire alors le vecteur $Y(x)$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ de coordonnées $Y_k(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$, $1 \leq k \leq n-1$ et réecrire les n équations obtenues comme un système matriciel dont on montrera qu'il est inversible.

(b) Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} f^{(n)}(t) = 0$, alors $\lim_{t\to+\infty} f^{(k)}(t) = 0$, pour tout entier k tel que $0 < k < n$.

(c) Montrer que pour tout entier m, $1 \leq m \leq n$ et pour tout entier k, $0 \leq k \leq m$, on a

$$M_k \leq 2^{k(m-k)/2} M_0^{1-k/m} M_m^{k/m}.$$

Indication : on pourra commencer par montrer que $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$ puis effectuer une récurrence sur l'entier m.

Exercice 4 (Un principe des zéros isolés) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ sur I.

(a) Montrer que si a est un zéro de f d'ordre fini, alors il est isolé, autrement dit, il existe un voisinage $V(a)$ de a tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in V(a) \setminus \{a\}$.
Indication : considérer l'ordre du zéro et appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur un voisinage bien choisi de a.

(b) On suppose que I est un intervalle compact. Montrer que si f possède une infinité de zéros dans I, alors f possède au moins un zéro d'ordre infini.

(c) Pouvez-vous donner un exemple d'une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, non indentiquement nulle et qui possède un zéro d'ordre infini en 0 ?

Exercice 5 (Théorème de Bernstein) Soit $a > 0$ et $f :]-a, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ sur $]-a, a[$. On suppose que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in]-a, a[$, on a

$$f^{(2k)}(x) \geq 0.$$

Le but de l'exercice est de montrer que f est développable en série entière sur $]-a, a[$.

(a) Montrer qu'il suffit de prouver que, pour tout $b \in]0, a[$, la fonction f est développable en série entière sur $]-b, b[$. Fixons maintenant $b \in]0, a[$.

(b) Soit $F(x) := f(x) + f(-x)$, $x \in [0, b]$, et

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t)\, dt.$$

(i) Montrer que $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} F(b)$ pour tout $x \in [0, b]$.

(ii) En déduire que, pour tout $x \in]-b,b[$, on a
$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n}.$$
(iii) Soit
$$r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t)\,dt.$$
Montrer que $|r_n(x)| \le R_n(|x|)$.

(iv) Soit $p \in \mathbb{N}$ et
$$S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p.$$
Montrer que, pour tout $x \in]-b,b[$, on a $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}(x) = f(x)$.

(v) Montrer que pour tout $x \in]-b,b[$, on a $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$ et en déduire que
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad (x \in]-b,b[).$$

Exercice 6 (Théorème de Sunyer et Balaguer) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞.

Première partie :

On suppose qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n_0)}(x) = 0$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus $n_0 - 1$.

Deuxième partie :

On suppose maintenant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n = n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que f est encore un polynôme. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe un voisinage $V(x)$ de x et un entier $n = n(x)$ tel que $f^{(n)}(t) = 0$ pour tout $t \in V(x)$.

1. Soit I un intervalle ouvert non vide (borné ou non) contenu dans $\mathcal{O}$ et soit $x_0 \in I$.
   (a) Montrer qu'il existe un entier n et un intervalle ouvert contenant x_0 sur lequel $f^{(n)}$ s'annule.
   (b) Soit $J =]\alpha, \beta[$ le plus grand intervalle ouvert contenant x_0 et contenu dans I sur lequel $f^{(n)}$ s'annule. Montrer que $J = I$.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde et supposer par exemple que $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer alors, en utilisant la formule de Taylor-Young appliquée en β à un ordre suffisamment grand, que f est un polynôme de degré $n-1$ au voisinage de β. Conclure à une absurdité.

(c) En déduire que si $\mathcal{O} = \mathbb{R}$, alors il existe un entier n tel que $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Conclure.

2. On suppose alors que $\mathcal{O} \neq \mathbb{R}$ et on va aboutir à une contradiction. Posons $F = \mathbb{R} \setminus \mathcal{O}$.

   (a) Supposons que F possède un point isolé x_0 et soit $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ intersecte l'ensemble $F \setminus \{x_0\}$.

      (i) Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[\cup]x_0, x_0 + \varepsilon[$.
      Indication : on pourra appliquer la question 1.b).

      (ii) En déduire que $x_0 \in \mathcal{O}$ et que F n'a pas de points isolés.

   (b) Soit $F_n = \{x \in F : f^{(n)}(x) = 0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

      (i) Montrer que F_n est fermé et que $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

      (ii) En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que $F_{n_0}^{\circ} \neq \emptyset$.
      Indication : on pourra appliquer le théorème de Baire.

      (iii) En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in F_{n_0}$ tel que si $H =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap F$, alors $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in H$.

   (c) Soit $y \in H$.

      (i) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(y_n)_n$ de H qui converge vers y.

      (ii) Montrer alors qu'il existe une suite infinie de points qui converge vers y et sur lesquels $f^{(n_0+1)}$ s'annule.

      (iii) En déduire que, pour tout entier $p \geq 0$, il existe une suite infinie de points qui converge vers y et sur lesquels $f^{(n_0+p)}$ s'annule.

      (iv) En déduire que, pour tout entier $p \geq 0$, on a $f^{(n_0+p)}(y) = 0$.

   (d) Montrer que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus H$ est une réunion d'intervalles ouverts $I_n =]a_n, b_n[$, $n \geq 0$.

   (e) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, il existe un entier $m_n \geq 0$ tel que $f^{(m_n)}$ est nulle sur I_n.

   (f) En déduire que f est un polynôme de degré $n_0 - 1$ sur I_n.
   Indication : on pourra appliquer la formule de Taylor en a_n, à un ordre suffisamment élevé.

   (g) Montrer que $f^{(n_0)}(x) = 0$ pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.

   (h) En déduire que $x_0 \in F$ et conclure.

Commentaire : les références utilisées pour cette feuille sont :

1. X. Gourdon, *Les maths en tête*, 2ème édition, Ellipses : **Exercice 3**, p. 83. **Exercice 5**, p. 250. **Exercice 6**, p. 402.
2. A. Dufetel, *Analyse, Cours et exercices corrigés, Capes externe, agrégation interne Mathématiques*, Vuibert-CNED : **Exercice 2**, p.195.
3. J.E. Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle, Capes et Agrégation de mathématiques*, EDP Sciences : **Exercice 1**, p. 61.
4. A. Pommellet, *Agrégation de mathématiques : cours d'analyse*, Ellipses : **Exercice 4**, p. 105.