Université Claude Bernard–Lyon I
Agrégation interne de Mathématiques : Analyse
Année 2011–2012

Épreuve sur table (ter)
7 janvier 2012

Au cours de ce problème, nous étudierons certaines propriétés de la fonction u lorsqu'elle est solution de l'équation différentielle ordinaire (parties II et III)

$$(1) \qquad \forall x \in [0,1], \quad -u''(x) + V(x)u(x) = f(x),$$

ou lorsqu'elle est solution non nulle de l'équation différentielle ordinaire (partie IV)

$$(2) \qquad \forall x \in [0,1], \quad -u''(x) + V(x)u(x) = \lambda u(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R} \text{ fixé}).$$

Dans tout le problème, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ donnée sur l'intervalle $[0,1]$ et V est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ strictement positive donnée sur l'intervalle $[0,1]$.

I Préliminaires

I.1 Démontrer qu'il existe un nombre réel strictement positif V_0 tel que

$$\forall x \in [0,1], \qquad V(x) \geq V_0 > 0.$$

I.2 Soit u une solution de (1). Démontrer que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

I.3 Soit a, b, c trois nombres réels donnés. Discuter, selon les valeurs de a, b et c, le nombre de solutions de l'équation (1) satisfaisant les conditions initiales

$$u(0) = a, \quad u'(0) = b, \quad u''(0) = c.$$

I.4 Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il à l'équation (1) avec les conditions

$$(4) \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \ ?$$

I.5 Soit v une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[x_1, x_2]$. On suppose que v possède un minimum local en $x_0 \in]x_1, x_2[$.
I.5.1. Montrer que $v'(x_0) = 0$.
I.5.2. En appliquant une formule de Taylor bien choisie, montrer que $v''(x_0) \geq 0$.
I.5.3. Ces résultats restent-ils vrais si $x_0 \in \{x_1, x_2\}$?

II Existence et unicité de la solution de (1) satisfaisant (4)

II.1 On suppose que f est positive : $f(x) \geq 0$, pour tout $x \in [0,1]$. Soit u une solution de (1).
II.1.1. Montrer que si u possède un minimum local en $x_0 \in]0,1[$, alors $u(x_0) \geq 0$.
II.1.2. Montrer que si u satisfait les conditions (4), alors

$$\forall x \in [0,1], \quad u(x) \geq 0.$$

II.2 On suppose que f est négative : $f(x) \leq 0$, pour tout $x \in [0,1]$. Soit u une solution de (1).
II.2.1. Montrer que si u possède un maximum local en $x_0 \in]0,1[$, alors $u(x_0) \leq 0$.
II.2.2. Montrer que si u satisfait les conditions (4), alors

$$\forall x \in [0,1], \quad u(x) \leq 0.$$

II.3 On suppose que f est la fonction nulle. Montrer que si u est une solution de (1) et satisfait les conditions (4), alors u est la fonction nulle.

II.4 Soit b un nombre réel donné. Soit $u_b : x \mapsto u_b(x)$ la solution de l'équation (1) avec les conditions initiales $u_b(0) = 0$, $u_b'(0) = b$. On pose

$$\varphi(b) = u_b(1).$$

II.4.1. Calculer la dérivée seconde de la fonction : $y = (u_b - u_0) - b(u_1 - u_0)$, en déduire que c'est la fonction nulle.

II.4.2. Montrer que φ est une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

II.5 Soit b, b' deux réels tels que $\varphi(b) = \varphi(b')$.

II.5.1. Que peut-on dire de $z = u_b - u_{b'}$?

II.5.2. Montrer que $b = b'$.

II.6 Montrer l'existence et l'unicité de la solution de

$$(5) \quad \begin{cases} -u''(x) + V(x)u(x) = f(x), & \forall x \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

III Approximation numérique de la solution u de (5)

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et on considère un vecteur $\bar{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Les composantes de $\overline{u}$ seront notées $u_i = (\overline{u})_i$, $i = 0, \ldots, n$. On pose $h = \frac{1}{n}$, $V_i = V(ih)$, $f_i = f(ih)$. On considère le système linéaire

$$(6) \quad \begin{cases} u_0 = 0, \\ \dfrac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} + V_i u_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ u_n = 0. \end{cases}$$

III.1 On suppose que $f_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$. On fait l'hypothèse que $\overline{u}$ est solution du système (6).

III.1.1. Soit i_0 un indice tel que $u_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq n-1}(u_i)$. Montrer que $u_{i_0} \geq 0$.

III.1.2. En déduire que $u_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$.

III.2 On suppose que $f_i \leq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$. On fait l'hypothèse que $\overline{u}$ est solution du système (6). Montrer que $u_i \leq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$.

III.3 Solution unique de (6)

III.3.1. On suppose que $f_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$. Montrer que le vecteur nul est l'unique solution de (6).

III.3.2. Démontrer qu'en toute généralité, le système (6) possède une unique solution.

III.4 Soit u la solution de (5) et $\overline{u}$ la solution de (6). On pose

$$v_i = u_i - u(ih) \quad \text{et} \quad \varepsilon_i = \frac{-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1}}{h^2} + V_i v_i, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

III.4.1. Montrer que

$$\varepsilon_i = -u''(ih) - \frac{-u((i-1)h) + 2u(ih) - u((i+1)h)}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

III.4.2. A l'aide de deux formules de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 (entre ih et $(i \pm 1)h$), en déduire l'inégalité

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{h^2}{12} \times \left(\max_{x \in [(i-1)h,(i+1)h]} |u^{(4)}(x)| \right), \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

III.5 On pose
$$E = \max_{1 \le i \le n-1} |\varepsilon_i|.$$
Soit, pour $i = 0, \ldots, n$,
$$x_i = \frac{i(n-i)}{2n^2}, \qquad w_i = v_i - E\,\frac{i(n-i)}{2n^2}.$$
III.5.1. Calculer
$$\frac{-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}}{h^2}, \quad 1 \le i \le n-1.$$
III.5.2. Montrer que $\overline{w} = (w_i)_{i=0,\ldots,n}$ est solution d'un système analogue à (6), où l'on remplace f_i par $-E + \varepsilon_i - V_i E x_i$.
III.5.3. En utilisant III.2, montrer finalement que pour $i = 0, \ldots, n$,
$$w_i \le 0.$$

III.6 Soit, pour $i = 0, \ldots, n$,
$$z_i = v_i + E\,\frac{i(n-i)}{2n^2}.$$
Montrer que pour $i = 0, \ldots, n$,
$$z_i \ge 0.$$

III.7 Estimation de l'erreur sur u
III.7.1. Déterminer $\max_{t \in [0,1]} t(1-t)$, en déduire un majorant de $\max_{0 \le i \le n} x_i$.
III.7.2. En déduire que
$$|u_i - u(ih)| \le \frac{h^2}{96}\left(\max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|\right), \quad 1 \le i \le n-1.$$
III.7.3. Que peut-on dire lorsque $n \to +\infty$?

III.8 On pose $l_i = V_i u_i - f_i$ pour $i = 0, \ldots, n$. Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que
$$|l_i - u''(ih)| \le A\left(\max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|\right) h^2 \quad 0 \le i \le n.$$

III.9 Estimation de l'erreur sur u''
Soit la fonction ℓ définie sur l'intervalle $[0,1]$ par
$$\ell(ih) = l_i, \quad 0 \le i \le n,$$
et
$$\ell(x) = l_i + \frac{x - ih}{h}(l_{i+1} - l_i) \quad \text{pour } x \in \left]ih, (i+1)h\right[, \quad 0 \le i \le n-1.$$
III.9.1. Vérifier que ℓ est continue.
III.9.2. Montrer qu'il existe une constante $B > 0$ telle que
$$\forall x \in [0,1], \quad |\ell(x) - u''(x)| \le B\left(\max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|\right) h^2.$$

III.10 Approximation de $u'(0)$
III.10.1. Montrer que pour la solution u de (5),
$$u'(0) = -\int_0^1 \left(\int_0^y u''(t)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}y.$$

III.10.2. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$, ainsi qu'une combinaison linéaire des l_i, que l'on notera M, telle que

$$|M - u'(0)| \leq C \left(\max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| \right) h^2.$$

IV Valeurs propres de $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$ avec conditions de Dirichlet

Dans cette partie, on conserve l'hypothèse (3) faite sur V, et on considère pour $\lambda \in \mathbb{R}$ le système

$$(7) \qquad \begin{cases} -u''(x) + V(x)u(x) = \lambda u(x), & \forall x \in [0,1], \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Nous allons étudier pour quelles valeurs de λ ce système possède une solution non identiquement nulle.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \mapsto u_\lambda(x)$ la solution de l'équation (2) avec $u_\lambda(0) = 0$, $u'_\lambda(0) = 1$. On pose

$$\Psi(\lambda) = u_\lambda(1).$$

IV.1 Montrer que le système (7) possède une solution non identiquement nulle si et seulement si $\Psi(\lambda) = 0$.

IV.2 Montrer que pour toute solution du système (7),

$$\int_0^1 \left(u'(x)^2 + V(x)u(x)^2 \right) \mathrm{d}x = \lambda \int_0^1 u(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

(Intégration par parties sur le premier terme.)

IV.3 On suppose que $\lambda \leq V_0$. Existe-t-il des solutions non identiquement nulles du système (7) ?

Dans les questions qui suivent, on suppose que $\lambda > V_0$ et on pose $\alpha = \sqrt{\lambda}$.

IV.4 Expression intégrale de u_λ

IV.4.1. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. On pose

$$\forall x \in [0,1], \quad v(x) = \int_0^x \frac{\sin(\alpha(x-s))}{\alpha} g(s) \,\mathrm{d}s.$$

Montrer que v est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer sa dérivée seconde.
(Si on a peur d'une intégrale à paramètre dont les bornes dépendent du paramètre, on pourra commencer par développer $\sin(\alpha(x-s))$.)

IV.4.2. En déduire la relation

$$(8) \qquad \forall x \in [0,1], \quad u_\lambda(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} + \int_0^x \frac{\sin(\alpha(x-s))}{\alpha} V(s) u_\lambda(s) \,\mathrm{d}s.$$

IV.5 On pose

$$h_\lambda(x) = \alpha \left(u_\lambda(x) - \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} \right).$$

Montrer que

$$\forall x \in [0,1], \quad h_\lambda(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \sin(\alpha(x-s)) V(s) h_\lambda(s) \,\mathrm{d}s + \frac{1}{\alpha} \int_0^x \sin(\alpha(x-s)) \sin(\alpha s) V(s) \,\mathrm{d}s.$$

IV.6 Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$, indépendante de λ, que l'on déterminera, telle que

$$\forall \lambda \geq \left(2 \max_{x\in[0,1]} |V(x)|\right)^2, \quad \max_{x\in[0,1]} |h_\lambda(x)| \leq \frac{C_1}{\alpha}.$$

IV.7 On considère le cas $\lambda = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2$ lorsque k est entier. Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_0, \quad \Psi\left(\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2\right) > 0.$$

IV.8 On considère le cas $\lambda = \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)^2$ lorsque k est entier. Montrer qu'il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_1, \quad \Psi\left(\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)^2\right) < 0.$$

IV.9 Soient $\lambda > V_0$ et $\mu > V_0$ deux nombres réels. On pose $g_{\lambda,\mu}(x) = u_\lambda(x) - u_\mu(x)$.
IV.9.1. Montrer qu'il existe deux constantes $C_2 > 0$ et $C_3 > 0$ telles que

$$\forall x \in [0,1], \quad |g_{\lambda,\mu}(x)| \leq C_2|\lambda - \mu| + C_3 \int_0^x |g_{\lambda,\mu}|(s)\,\mathrm{d}s.$$

On pourra utiliser la représentation intégrale (8).

Soit les fonctions

$$I_{\lambda,\mu}(x) = \int_0^x |g_{\lambda,\mu}(s)|\,\mathrm{d}s, \quad J_{\lambda,\mu}(x) = I_{\lambda,\mu}(x)e^{-C_3 x}, \quad x \in [0,1].$$

IV.9.2. Ecrire une inégalité satisfaite par $J'_{\lambda,\mu}(x)$.
IV.9.3. En déduire qu'il existe une constante $C_4 > 0$ telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad I_{\lambda,\mu}(x) \leq C_4|\lambda - \mu|.$$

IV.10 Montrer la continuité de la fonction Ψ sur $]V_0, +\infty[$.

IV.11 Montrer finalement qu'il existe une suite infinie $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une solution non partout nulle du système (7) pour $\lambda = \lambda_n$;
2. $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$.