Université Claude Bernard Lyon 1
Agrégation interne de Mathématiques : Analyse
Année 2013–2014

Épreuve sur table
23 novembre 2013

I Préliminaires

I.1 La fonction V est continue sur le compact $[0,1]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, $V(x) \geq V(x_0)$. On peut donc prendre $V_0 = V(x_0)$.

I.2 L'équation (1) satisfait les conditions de Cauchy-Lipschitz global, puisqu'elle est linéaire. Pour tout a, b, il existe donc une unique solution u, définie sur $[0,1]$, telle que $u(0) = a$ et $u'(0) = b$. Si on veut de plus la condition $u''(0) = c$, il est nécessaire et suffisant d'avoir $-c+V(0)a = f(0)$, on aura alors exactement une telle solution. Sinon, il n'y en aura pas.

I.3 Non, le théorème de Cauchy ne donne une solution unique que pour le problème de Cauchy, i.e. des conditions initiales portant sur les dérivées successives de la solution *au même point.*

Remarque . *La lecture du titre de la partie* II *devrait dissuader toute réponse positive !*

I.4 Minimum local (à savoir par cœur)

I.4.1. Pour x dans un voisinage de x_0, on a : $v(x) - v(x_0) \geq 0$. Si x est de plus strictement supérieur (resp. inférieur) à x_0, on a donc :

$$\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad \text{(resp. } \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \leq 0).$$

En passant à la limite lorsque $x \overset{>}{\to} x_0$ (resp. $x \overset{<}{\to} x_0$), il vient, sachant l'existence de $v'(x_0)$: $v'(x_0) \geq 0$ (resp. $v'(x_0) \leq 0$). D'où $v'(x_0) = 0$.

I.4.2. Ecrivons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x_0 et un point $x \neq x_0$: il existe $c \in \,]x, x_0[$ tel que

$$v(x) - v(x_0) = \frac{(x - x_0)^2}{2} v''(c).$$

Si on prend x assez proche de x_0, on aura : $v(x) - v(x_0) \geq 0$, soit $v''(c) \geq 0$. On sait que c n'est pas nécessairement unique, mais la continuité de v'' en x_0 et le fait que $c \in \,]x, x_0[$ entraînent que $\lim_{x \to x_0} v''(c) = v''(x_0)$. D'où : $v''(x_0) \geq 0$.

I.4.3. Non : prendre $v(x) = x(1-x)$, par exemple : v atteint son minimum en 0 et 1, $v'(x_0) \neq 0$ et $v''(x_0) \leq 0$ pour $x_0 = 0, 1$.

II Existence et unicité de la solution de (1) satisfaisant (4)

II.1 Positivité des solutions pour un second membre positif

II.1.1. On applique I.4 : $u'(x_0) = 0$ et $u''(x_0) \geq 0$, donc $V(x_0)u(x_0) = f(x_0) + u''(x_0) \geq 0$. Par suite, $u(x_0) \geq 0$.

II.1.2. Puisque u est continue sur le compact $[0,1]$, elle atteint son minimum en un point $x_0 \in [0,1]$. Si $x_0 \in \{0,1\}$, on a : $u(x_0) = 0$. Sinon, on vient de montrer que $u(x_0) \geq 0$. Dans tous les cas, pour tout $x \in [0,1]$, on a : $u(x) \geq u(x_0) \geq 0$.

II.2 Second membre négatif

II.2.1. On applique I.4 à la fonction $-u$, pour en déduire que $u''(x_0) \leq 0$, puis $V(x_0)u(x_0) = f(x_0) + u''(x_0) \leq 0$, puis $u(x_0) \leq 0$.

II.2.2. Procéder comme en II.1.2., en distinguant x_0 égal ou pas à 0 ou 1.

II.3 La remarque qui tue est que la fonction nulle satisfait les hypothèses de II.1 et de II.2. La solution (sous réserve d'existence) est donc à la fois positive et négative, donc elle est nulle.

II.4 Caractère affine de $\varphi : b \mapsto u_b(1)$

II.4.1. D'abord, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car u_0, u_1 et u_b le sont. Comme l'équation (1) est linéaire, y est solution de l'équation (1) avec $f = 0$. [En effet, sa dérivée seconde est

$$y'' = (u_b'' - u_0'') - b(u_1'' - u_0'') = (Vu_b - f - Vu_0 + f) - b(Vu_1 - f - Vu_0 + f) = Vy.]$$

De plus, on a : $y(0) = 0$ et $y'(0) = \cdots = 0$. Par unicité de la solution dans le problème de Cauchy pour l'équation $-y'' + Vy = 0$, y est la fonction nulle.

II.4.2. On calcule alors :

$$\varphi(b) = u_b(1) = u_0(1) + b(u_1(1) - u_0(1)),$$

ce qui exprime que φ est affine. (Etonnant, non ?)

II.5 Injectivité de φ

II.5.1. Comme ci-dessus, z est solution de $-z'' + Vz = 0$. On a : $z(0) = 0$ et $z(b) = u_b(1) - u_{b'}(1) = \varphi(b) - \varphi(b') = 0$, donc, par unicité de la solution du problème de Cauchy, z est la fonction nulle : $u_b = u_{b'}$.

II.5.2. Mais alors, $u_b'(0) = u_{b'}'(0)$, d'où $b = b'$.

II.6

Une application affine injective est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En effet, dire que φ est injective, c'est dire que son coefficient directeur (?) $u_1(1) - u_0(1)$ n'est pas nul.

Par unicité du problème de Cauchy, une solution u de (1) telle que $u(0) = 0$ est nécessairement de la forme $u = u_b$, où $b = u'(0)$. Mais alors, on a $u(1) = 0$ si et seulement si $\varphi(b) = 0$.

Puisque φ est une bijection, on a donc existence de la solution (c'est u_{b_0}, où b_0 est l'antécédent de 0 par φ) et unicité (car 0 n'a qu'un seul antécédent).

III Approximation numérique de la solution u de (5)

III.1 Positivité de la solution pour un second membre positif

III.1.1. Il s'agit de remarquer que

$$V_{i_0} u_{i_0} = f_{i_0} + \frac{(u_{i_0-1} - u_{i_0}) + (u_{i_0+1} - u_{i_0})}{h^2} + f_{i_0} \geq 0,$$

puisque par définition de i_0, u_{i_0} est minimal et par hypothèse, $f_{i_0} \geq 0$. On conclut car $V_{i_0} > 0$.

III.1.2. Trivial par minimalité de u_{i_0}.

Remarque . *C'est le même raisonnement qu'en II.1, dans une version discrétisée.*

III.2

Fort analogue au cas positif. AQT.

III.3 Solution unique de (6)

III.3.1. Supposons que $f_i = 0$ pour tout i. Bien sûr, le vecteur nul est solution (système linéaire !). Inversement, si $\overline{u}$ est une solution, on peut appliquer III.1.1. et III.2 pour obtenir : $u_i = 0$ pour tout i.

III.3.2. On vient de prouver que la matrice du système linéaire (6) est inversible (et ce, sans déterminant, ce qui est plutôt agréable). Par suite, quel que soit le second membre, le système possède une solution unique.

III.4 Majoration des $|\varepsilon_i|$

III.4.1. Pour $i = 1, \dots, n-1$, on a :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i &= \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} + V_i u_i - \frac{-u((i-1)h) + 2u(ih) - u((i+1)h)}{h^2} - V_i u(ih) \\
&= f_i - V_i u(ih) - \frac{-u((i-1)h) + 2u(ih) - u((i+1)h)}{h^2} \\
&= -u''(ih) - \frac{-u((i-1)h) + 2u(ih) - u((i+1)h)}{h^2},
\end{aligned}$$

en se rappelant que $f_i = f(ih)$, que $V_i = u(ih)$ et que $-u''(ih) + V(ih)u(ih) = f(ih)$.

III.4.2. La formule de Taylor-Lagrange donne $\eta_i \in]ih,(i+1)h[$ et $\theta_i \in](i-1)h, ih[$ tels que :

$$\begin{cases} u((i+1)h) = u(ih) + hu'(ih) + \dfrac{h^2}{2}u''(ih) + \dfrac{h^3}{6}u^{(3)}(ih) + \dfrac{h^4}{24}u^{(4)}(\eta_i) \\ u((i-1)h) = u(ih) - hu'(ih) + \dfrac{h^2}{2}u''(ih) - \dfrac{h^3}{6}u^{(3)}(ih) + \dfrac{h^4}{24}u^{(4)}(\theta_i) \end{cases} \quad 1 \le i \le n-1.$$

Substituons dans III.4.1. et majorons (les termes impairs s'éliminent, $\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$) :

$$|\varepsilon_i| \le \frac{h^2}{12} \times \left(\max_{x\in[(i-1)h,(i+1)h]} |u^{(4)}(x)| \right), \quad 1 \le i \le n-1.$$

III.5 Négativité des w_i

III.5.1. On développe $x_{i\pm1}$ en gardant i et $n-i$:

$$\begin{aligned} \frac{-x_{i-1}+2x_i-x_{i+1}}{h^2} &= \frac{-(i-1)(n-i+1)+2i(n-i)-(i+1)(n-i-1)}{2n^2h^2} \\ &= \frac{-i(n-i)-i+(n-i)+1+2i(n-i)-i(n-i)+i-(n-i)+1}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

III.5.2. D'abord, $w_0 = w_n = 0$. Pour $1 \le i \le n-1$, on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{-w_{i-1}+2w_i-w_{i+1}}{h^2} + V_i w_i &= \frac{-v_{i-1}+2v_i-v_{i+1}}{h^2} + V_i v_i - E\frac{-x_{i-1}+2x_i-x_{i+1}}{h^2} - EV_i x_i \\ &= \varepsilon_i - E - EV_i x_i \end{aligned}$$

III.5.3. Puisque pour $i=0,\dots,n$, $f_i' = \varepsilon_i - E - EV_i x_i \le 0$, on a avec III.2 : $w_i \le 0$.

III.6 Indiscernable du cas négatif. AQT.

III.7 Estimation de l'erreur sur u

III.7.1. On vérifie que $\max_{t\in[0,1]} t(1-t) = 1/4$ (atteint pour $t=1/2$), d'où $\max_{0\le i\le n} x_i \le 1/8$.

III.7.2. Avec III.5 et III.6, puis III.7.1. et III.4.2., on trouve :

$$|u_i - u(ih)| = |v_i| \le Ex_i \le \frac{E}{8} \le \frac{h^2}{96}\left(\max_{x\in[0,1]} |u^{(4)}(x)|\right), \quad 1 \le i \le n-1.$$

III.7.3. Dire que $n \to +\infty$, c'est dire que $h \to 0$. La suite (finie) $\overline{u}$ se rapproche uniformément de $(u(t_i))_{0\le i\le n}$: $\max_{0\le i\le n} |u_i - u(t_i)| \le G/n^2$ pour $G = ||u^{(4)}||_\infty/96$.

III.8 Exercice laissé au lecteur (*cf.* RMS 2000-2001).

III.9 Idem.

III.10 Idem.

IV Valeurs propres de $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$ avec conditions de Dirichlet

Notons que l'équation (2) est linéaire homogène, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et ses solutions sur $[0,1]$ forment un espace vectoriel de dimension 2. La fonction nulle est une solution, c'est la seule telle que $u(0) = u'(0) = 0$ (unicité pour le problème de Cauchy).

IV.1 Si $u_\lambda(1) = \Psi(\lambda) = 0$, alors u_λ est une solution non triviale du système (7).

Idée-clé . *L'équation est linéaire homogène, on peut changer $u'(0)$ en multipliant par une constante.*

Inversement, si le système (7) possède une solution non triviale u, alors $u'(0) \neq 0$, sans quoi u serait la solution nulle. Mais alors, si v est la fonction $u/u'(0)$, on a : $v(0) = 0$, $v'(0) = 1$ et v est solution de (2), donc $v = u_\lambda$. Par suite, $\Psi(\lambda) = u_\lambda(1) = u'(0).u(1) = 0$.

IV.2 On intègre par parties (le terme intégré est nul car $u(0) = u(1) = 0$) :

$$\int_0^1 u'(x)^2 \,\mathrm{d}x = \Big[u'(x)u(x)\Big]_0^1 + \int_0^1 -u''(x)u(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \int_0^1 \left(-V(x)u(x) + \lambda u(x)\right) u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque . *Si $u(x)$ est la position au temps x, penser $\int u'(x)^2\,\mathrm{d}x$ comme l'énergie cinétique. L'égalité ci-dessus exprime la conservation de l'énergie au cours du mouvement.*

IV.3 Non ! Supposons avoir une solution u avec $\lambda \leq V_0 \leq V(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Comme l'intégrale d'une fonction positive est positive :

$$\lambda \int_0^1 u^2 = \int_0^1 (u')^2 + \int_0^1 V u^2 \geq \int_0^1 (u')^2 + \int_0^1 V_0 u^2,$$

d'où :

$$0 \geq (\lambda - V_0) \int_0^1 u^2 \geq \int_0^1 (u')^2 \geq 0,$$

ce qui force $\int_0^1 u^2 = 0$, donc u est la solution nulle.

IV.4 Expression intégrale de u_λ

IV.4.1. <u>Première solution</u> : Introduisons la fonction

$$\begin{array}{rccl} G: & [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (b,x) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^b \frac{\sin(\alpha(x-s))}{\alpha} g(s)\,\mathrm{d}s. \end{array}$$

Pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $b \mapsto G(b,x)$ est une primitive de la fonction continue $b \mapsto \frac{\sin(\alpha(x-b))}{\alpha} g(b)$, donc

$$\forall (b,x) \in [0,1]\times[0,1], \quad \frac{\partial G}{\partial b}(b,x) = \frac{\sin(\alpha(x-b))}{\alpha} g(b).$$

D'autre part, la fonction $(s,x) \mapsto \frac{\sin(\alpha(x-s))}{\alpha} g(s)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (par rapport au couple (s,x)) sur $[0,1]\times[0,1]$, donc on peut dériver sous le signe $\int$:

$$\forall (b,x) \in [0,1]\times[0,1], \quad \frac{\partial G}{\partial x}(b,x) = \int_0^b \cos(\alpha(x-s)) g(s)\,\mathrm{d}s.$$

On remarque maintenant que $v(x) = G(x,x)$. Par la règle de différentiation des fonctions composées, on trouve, pour $x \in [0,1]$:

$$v'(x) = \frac{\partial G}{\partial b}(x,x) + \frac{\partial G}{\partial x}(x,x) = \frac{\sin(\alpha(x-x))}{\alpha} g(x) + \int_0^x \cos(\alpha(x-s)) g(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x \cos(\alpha(x-s)) g(s)\,\mathrm{d}s$$

On peut recommencer le même trafic, on trouve, pour $x \in [0,1]$:

$$v''(x) = \cos(\alpha(x-x)) g(x) + \int_0^x -\alpha \sin(\alpha(x-s)) g(s)\,\mathrm{d}s = g(x) - \alpha \int_0^x \sin(\alpha(x-s)) g(s)\,\mathrm{d}s.$$

<u>Deuxième solution</u> : On peut aussi écrire, pour $x \in [0,1]$:

$$v(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} \int_0^x \cos(\alpha s) g(s)\,\mathrm{d}s + \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha} \int_0^x \sin(\alpha s) g(s)\,\mathrm{d}s,$$

et un calcul élémentaire, mais plus long que le précédent permet de retrouver v''.

IV.4.2. En prenant $g = Vu_\lambda$, on trouve que pour $x \in [0,1]$:

$$u_\lambda''(x) = -\alpha \sin(\alpha x) + V(x)u_\lambda(x) - \alpha \int_0^x \sin(\alpha(x-s))V(s)u_\lambda(s)\,\mathrm{d}s.$$

Rappelons-nous que $u_\lambda'' = Vu_\lambda - \alpha^2 u_\lambda$, d'où

$$V(x)u_\lambda(x) - \alpha^2 u_\lambda(x) = -\alpha \sin(\alpha x) + V(x)u_\lambda(x) - \alpha \int_0^x \sin(\alpha(x-s))V(s)u_\lambda(s)\,\mathrm{d}s,$$

et (8) en découle.

IV.5 Totalement élémentaire :

$$h_\lambda(x) = \int_0^x \sin(\alpha(x-s))V(s)u_\lambda(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x \sin(\alpha(x-s))V(s)\left(\frac{h_\lambda(x)}{\alpha} + \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\right)\mathrm{d}s,$$

et c'est gagné.

IV.6 Par construction, h_λ est continue, ce qui justifie l'existence de $H = \max_{x\in[0,1]} |h(x)|$. *Idem* pour V. Soit λ tel que $\alpha > 2\max_{x\in[0,1]} V(x)$. En majorant brutalement $|\int f|$ par $\int |f|$ et les sinus par 1 et x par 1, on a grâce à IV.5 :

$$\begin{aligned} |h_\lambda(x)| &\leq \int_0^x |\sin(\alpha(x-s))|\,\frac{V(s)}{\alpha}\,|h_\lambda(s)|\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\alpha}\int_0^x |\sin(\alpha(x-s))\sin(\alpha s)|V(s)\,\mathrm{d}s, \\ &\leq \frac{H}{2} + \frac{1}{\alpha}\int_0^1 V(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

d'où :

$$H \leq \frac{H}{2} + \frac{1}{\alpha}\int_0^1 V(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \text{ou} \quad H \leq \frac{C_1}{\alpha}, \quad \text{avec} \quad C_1 = 2\int_0^1 V(s)\,\mathrm{d}s.$$

Idée-clé . (pour les deux questions suivantes) *Remarquons que la majoration de $h_\lambda(x)$ obtenue juste au-dessus montre, avec la définition de h_λ :*

$$u_\lambda(1) = \frac{\sin(\alpha \times 1)}{\alpha} + \frac{h_\lambda(1)}{\alpha} = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right),$$

donc $u_\lambda(1)$ a des chances d'être du signe de $\sin\alpha$ pour α assez grand :
– pour $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\sin\alpha = 1$, on en tire $\Psi(\lambda) = u_\lambda(1) > 0$;
– pour $\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $\sin\alpha = -1$, on en tire $\Psi(\lambda) = u_\lambda(1) < 0$.

IV.7 Pour k tel que $\frac{\pi}{2} + 2k\pi > 2\max_{x\in[0,1]} V(x)$, et $\lambda = \alpha^2 = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2$, on a, d'après IV.6,

$$u_\lambda(1) = \frac{\sin(\alpha \times 1)}{\alpha} + \frac{h_\lambda(1)}{\alpha} = \frac{1 + h_\lambda(1)}{\alpha} \qquad \text{et} \quad |h_\lambda(1)| \leq \frac{C_1}{\alpha}.$$

Il existe k_0 tel que pour $k \geq k_0$, on a : $C_1/\alpha \leq 1/2$. Pour ces k, on a donc : $1 + h_\lambda(1) \geq 1 - 1/2 > 0$. Ainsi, pour k assez grand, $\Psi(\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2) > 0$.

IV.8 Left to the reader, as they say.

IV.9 **Préliminaires pour la continuité de Ψ**

IV.9.1. Avec (8), on a, pour $x \in [0,1]$:

$$g_{\lambda,\mu}(x) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\sin(\sqrt{\mu}x)}{\sqrt{\mu}} + \int_0^x \left(\frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-s))}{\sqrt{\lambda}}u_\lambda(s) - \frac{\sin(\sqrt{\mu}(x-s))}{\sqrt{\mu}}u_\mu(s)\right)V(s)\,\mathrm{d}s.$$

Pour $x \in [0,1]$ fixé, on introduit la fonction (dérivable !)

$$k_x(\lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}, \qquad k_x'(\lambda) = -\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{2\lambda^{3/2}} - \frac{x}{2}\cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Puisque k_x' est majorée par $D_1 = \frac{1}{2V_0^{3/2}} + \frac{1}{2}$, l'inégalité des accroissements finis donne :

$$\forall x \in [0,1], \quad |k_x(\lambda) - k_x(\mu)| \leq D_1|\lambda - \mu|.$$

On note aussi que k_x est uniformément majorée par $D_0 = 1$, puisque $|k_x(\lambda)| \leq x \leq 1$.
D'autre part, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\Big|k_{x-s}(\lambda)u_\lambda(x) - k_{x-s}(\mu)u_\mu(x)\Big| &= \Big|k_{x-s}(\lambda) - k_{x-s}(\mu))u_\lambda(x) + k_{x-s}(\mu)(u_\lambda(x) - u_\mu(x)\Big| \\ &\leq D_1|\lambda-\mu|\,|u_\lambda(x)| + D_0|g_{\lambda,\mu}(x)| \qquad (9).\end{aligned}$$

Il suffit donc de majorer $u_\lambda(x)$ uniformément. On a, par définition de h_λ et en vertu de IV.6 :

$$|u_\lambda(x)| = \left|\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{h_\lambda(x)}{\sqrt{\lambda}}\right| \leq \left|\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}\right| + \left|\frac{h_\lambda(x)}{\sqrt{\lambda}}\right| \leq \left|\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}\right| + \frac{C_1}{\sqrt{\lambda}} \leq D_0 + \frac{C_1}{\sqrt{V_0}}.$$

On reporte dans (9), on intègre sur $[0,x]$, et c'est gagné.
IV.9.2. Ici, λ et μ sont fixés, on abandonne ces indices. On a :

$$J'(x) = (I'(x) - C_3I(x))e^{-C_3x} \leq C_2|\lambda-\mu|e^{-C_3x}.$$

IV.9.3. On en déduit :

$$J(x) \leq C_2|\lambda-\mu|\left[\frac{e^{-C_3s}}{-C_3}\right]_0^x \leq \frac{C_2}{C_3}|\lambda-\mu|(1-e^{-C_3x}) \leq \frac{C_2}{C_3}|\lambda-\mu|,$$

puis

$$I(x) \leq e^{C_3x}J(x) \leq e^{C_3}J(x) \leq \frac{C_2e^{C_3}}{C_3}|\lambda-\mu|.$$

On peut donc prendre $C_4 = C_2e^{C_3}/C_3$.

Remarque . *C'est plus ou moins ce qu'on appelle le lemme de Gronwall. Comparer avec la version discrète du capes blanc précédent.*

IV.10 Si on reporte la majoration de $|I_{\lambda,\mu}(x)$ dans l'inégalité de IV.9.1., on trouve :

$$\forall x \in [0,1], \qquad |g_{\lambda,\mu}(x)| \leq C_2|\lambda-\mu| + C_3\int_0^x C_4|\lambda-\mu|\,\mathrm{d}s \leq (C_2 + C_3C_4)|\lambda-\mu|.$$

Cette inégalité, si on l'écrit pour $x=1$, donne : $|\Psi(\lambda) - \Psi(\mu)| \leq C_4|\lambda-\mu|$. La continuité de Ψ en résulte.

IV.11 Soit $k \geq k_0$. On sait que Ψ est continue, que $\Psi\left(\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)^2\right) > 0$ et que $\Psi\left(\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)^2\right) < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\lambda_{k-k_0} \in \left[\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)^2, [\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)^2\right]$, tel que $\Psi(\lambda_{k-k_0}) = 0$. On conclut avec IV.1 que pour cette valeur de λ, le système (7) possède une solution non nulle.

***

IV.12 Mais d'où ça vient, tout ces lapins qui sortent du chapeau ?

IV.12.1. Dans toute la partie IV, l'idée est d'écrire (2) sous la forme :

$$(2)' \qquad y'' + \lambda y = Vy,$$

c'est-à-dire de considérer (2) comme une "perturbation" de l'équation : $z'' + \lambda z = 0$. Puisqu'on s'intéresse aux grandes valeurs de λ (*cf.* les conditions $\lambda > V_0$, $\lambda \geq (2 \max V)^2$, $k \geq k_0$, etc.), cela a un sens.

L'idée de toute cette partie est de comparer u_λ, la solution de $y'' + \lambda y = Vy$ telle que $u_\lambda(0) = 0$, $u'_\lambda(0) = 1$, à la solution de $z'' + \lambda z = 0$ qui satisfait les mêmes conditions, c'est-à-dire (vérifier !) : $z_\lambda(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}$ (où $\alpha = \sqrt{\lambda}$).

IV.12.2. On part donc de deux solutions z_1 et z_2 linéairement indépendantes de $z'' + \lambda z = 0$, et on fait une espèce de méthode de variation de la constante en cherchant une solution y de $y'' + \lambda y = Vy$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = f_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ z'_1 \end{pmatrix} + f_2 \begin{pmatrix} z_2 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 z_1 + f_2 z_2 \\ f_1 z'_1 + f_2 z'_2 \end{pmatrix},$$

où f_1, f_2 sont les nouvelles fonctions inconnues. Cette manipulation est un peu curieuse, car le "second membre" Vy de l'équation $(2)'$ dépend de l'inconnue y... Mais bon, si ça marche à la fin...

Dérivons, remplaçons y'' par $-\lambda y + Vy$, on obtient un système linéaire d'inconnues f'_1 et f'_2 :

$$\begin{pmatrix} y' \\ -\lambda y + Vy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_1 z_1 + f_1 z'_1 + f'_2 z_2 + f_2 z'_2 \\ f'_1 z'_1 + f_1 z''_1 + f'_2 z'_2 + f_2 z''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_1 z_1 + f_1 z'_1 + f'_2 z_2 + f_2 z'_2 \\ -\lambda f_1 z_1 - \lambda f_2 z_2 + f'_1 z'_1 + f'_2 z'_2 \end{pmatrix}.$$

En utilisant $-\lambda y = -\lambda f_1 z_1 - \lambda f_2 z_2$ et $y' = f_1 z'_1 + f_2 z'_2$, on se ramène à un système linéaire d'inconnues f'_1 et f'_2 :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_1 f'_1 \; + z_2 f'_2 & = & 0 \\ z'_1 f'_1 \; + z'_2 f'_2 & = & Vy \end{array} \right.$$

Le déterminant de ce système est le célèbre *wronskien* :

$$W = z_1 z'_2 - z_2 z'_1.$$

On vérifie par dérivation qu'il est constant :

$$W' = z'_1 z'_2 + z_1 z''_2 - z'_2 z'_1 - z_2 z''_1 = 0.$$

Si on évalue en $x = 0$, on voit que c'est le déterminant de la famille de vecteurs $\begin{pmatrix} z_1(0) \\ z'_1(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2(0) \\ z'_2(0) \end{pmatrix}$. Par unicité dans le problème de Cauchy, l'hypothèse que z_1 et z_2 sont linéairement indépendantes se traduit par le fait que $W \neq 0$. Quitte à diviser z_2 par W, on peut toujours supposer que $W = 1$. Bref :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'_1 & = & -qyz_2 \\ f'_2 & = & qyz_1 \end{array} \right. \qquad \text{et} \quad y(x) = z_1(x) \int_0^x -qyz_2 + A_1 z_1(x) + z_2(x) \int_0^x qyz_1 + A_2 z_2(x),$$

où A_1 et A_2 sont des constantes. Avec les conditions $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, on trouve :

$$y(x) = u_\lambda(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} + \int_0^x \frac{\sin(\alpha(x - s))}{\alpha} V(s) u_\lambda(s) \, \mathrm{d}s = (z_\lambda + z_\lambda * (V u_\lambda))(x).$$

Conclusion : d'une part la formule (8) n'est pas miraculeuse, d'autre part, on voit des miracles dans les manipulations, qui donnent un parfum très algébrique à la chose.

IV.12.3. Quant à la fonction h_λ, si on poursuit l'idée que (2) est une perturbation de l'équation avec $V = 0$, il est naturel de comparer les deux solutions u_λ de $y''+\lambda y = Vy$ et z_λ de $z''+\lambda z = 0$ qui satisfont les mêmes conditions aux limites : fonction nulle en 0, dérivée en 0 égale à 1 :

$$h_\lambda = \frac{1}{\alpha}(u_\lambda - z_\lambda).$$

(Le $\frac{1}{\alpha}$ n'est là que par commodité, mais il n'a pas grande signification.)
Les questions IV.5 et IV.6 montrent que u_λ et z_λ sont proches si α est assez grand. Dans IV.7 et IV.8, on exploite ceci avec les valeurs spéciales de λ pour trouver le signe de Ψ à ces points.

IV.12.4. Dans le même ordre d'idée, pour prouver la continuité de Ψ, on va se laisser guider par l'idée que si λ et μ sont assez proches, les solutions u_λ et u_μ sont également proches (au sens de la norme du sup). Les questions IV.9 et IV.10 en sont la traduction technique, on en déduit la continuité de Ψ.

IV.12.5. Ainsi, on a montré dans IV.3 que le spectre de l'opérateur $y \mapsto -y''+Vy$ était borné par en-dessous, et on exhibe en IV.11 une infinité de valeurs dans ce spectre. On peut être en fait plus précis en montrant que tous les points du spectre sont discrets (mais c'est plus de travail !).
Au niveau physique, l'équation (2) peut modéliser des tas de choses : vibrations forcées d'une corde, atome d'hydrogène, oscillateur harmonique (quantique), etc. Le fait que le spectre soit discret s'interprète en disant que les fréquences de résonnance de la corde, l'énergie de l'atome d'hydrogène ou de l'électron, etc., sont quantifiées. Tout un monde caché dans cette équation...