

Exercice 1

1. Les coordonnées des trois A , B et C vérifient bien l'équation $2x + 2y - z - 11 = 0$.

De plus, ces trois points ne sont pas alignés et définissent donc bien un plan.

De plus, l'équation $2x + 2y - z - 11 = 0$ est bien celle d'un plan.

Donc, une équation du plan (ABC) est bien $2x + 2y - z - 11 = 0$.

2. Le point E est le projeté orthogonal de D sur (ABC) si et seulement si la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC) et $E \in (ABC)$.

Le vecteur \vec{n} de coordonnées $(2; 2; -1)$ est normal au plan (ABC)

On a bien $E \in (ABC)$ mais les vecteurs \overrightarrow{DE} et \vec{n} ne sont pas colinéaires.

On en déduit que (DE) n'est pas orthogonale à (ABC) , donc E n'est pas le projeté orthogonal de D sur (ABC) .

3. On vérifie simplement que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, donc (AB) et (CD) sont orthogonales.

4. Le point (D) a pour coordonnées $(1, 0, -2)$.

Pour que l'équation paramétrique soit celle de (CD) , il faut au moins qu'il existe un réel t tel que:

$$\begin{cases} 1 &= -1 + 2t \\ 0 &= -1 + t \\ -2 &= 1 - t \end{cases}$$

On vérifie sans problème qu'une telle valeur t n'existe pas, donc, ce n'est pas l'équation paramétrique de (CD) .

5. On utilise les coordonnées des points pour voir que les vecteurs \overrightarrow{AI} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires, donc I est sur la droite (AB) .

CONCLUSION

1. VRAI
2. FAUX
3. VRAI
4. FAUX
5. VRAI

Exercice 2

$$1. (a) \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} \times e = +\infty} \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \times e = 0}$$

La droite des abscisses est donc asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

(b) f est produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc elle est dérivable sur \mathbb{R} .

De plus, $f'(x) = e^{1-x}(-x^2 + 2x)$.

(c) Pour tout x réel, $e^{1-x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $(-x^2 + 2x)$.

$-x^2 + 2x = -x(x - 2)$ d'où : $f'(x) \leq 0 \iff x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$.

f est donc décroissante sur $] -\infty; 0]$, puis croissante sur $[0; 2]$ et enfin décroissante sur $[2; +\infty[$.

$$2. I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

(a) On a : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx$. Posons alors $u(x) = x^{n+1}$ et $v(x) = -e^{1-x}$.

On a alors $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v'(x) = e^{1-x}$.

Donc,

$$I_{n+1} = \int_0^1 u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx = [-x^{n+1}e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^n e^{1-x} dx$$

D'où $\boxed{I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n}$.

(b) Pour le calcul de I_1 , on effectue une intégration par parties:

$$I_1 = \int_0^1 x e^{1-x} dx = [-x e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = [(-x-1)e^{1-x}]_0^1 = e - 2.$$

D'après la question précédente, $I_2 = -1 + 2I_1 = -1 + 2(e-2) = 2e-5$

(c) I_2 correspond à l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f , les droites d'équations $x=0$ et $x=1$, et l'axe des abscisses.

3. (a) Pour tout $x \in [0; 1]$, on a : $0 \leq 1-x \leq 1$, donc comme (e^x) est croissante sur \mathbb{R} , on a : $e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1$ d'où $1 \leq e^{1-x} \leq e$.

Comme pour tout $x \in [0; 1]$, $x^n \geq 0$, on a alors : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e.x^n$.

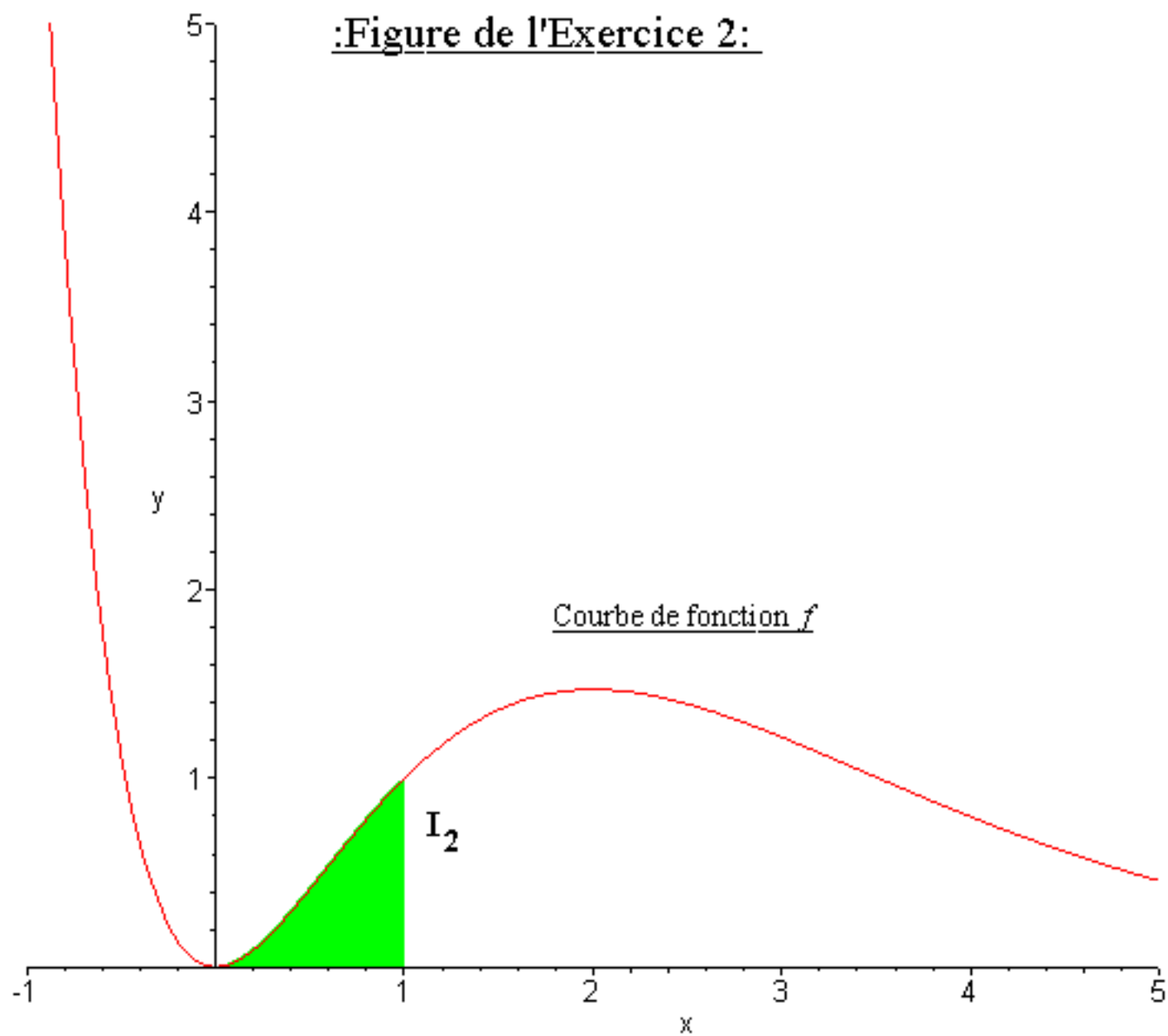
(b) On en déduit alors que : $\int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$, d'où :

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

:Figure de l'Exercice 2:



Exercice 3 Spécialité

Partie A

1. Théorème de Bézout:

Soit a et b deux entiers relatifs. Alors:

a et b sont premiers entre eux si et seulement il existe u et v dans \mathbb{Z} tels que $au + bv = 1$.

Théorème de Gauss:

Soit a , b et c trois entiers relatifs. Alors

Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c .

2. Si a et b sont premiers entre eux alors il existe u et v dans \mathbb{Z} tel que $au + bv = 1$.

D'où, en multipliant par c , $acu + bcv = c$.

Si de plus, a divise bc , alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $bc = ka$. On a alors $acu + kav = c$.

D'où $a(cu + kv) = c$, donc a divise c .

Partie B

1. les entiers 19 et 12 sont premiers entre eux, donc, d'après le Théorème de bezout, il existe u et v entiers relatifs tels que $19u + 12v = 1$.

$$N = 13 \times 12v + 6 \times 19u.$$

Comme $19u + 12v = 1$, on a $19u \equiv 1[12]$ et $12v \equiv 1[19]$.

Comme $N \equiv 13 \times 12v[19]$, on a: $N \equiv 13[19]$ De même: $N \equiv 6 \times 19v[12]$ donc $N \equiv 6[12]$.

N est bien solution de (S) .

2. (a) n_0 est solution de (S) , ce qui signifie que $n_0 \equiv 13[19]$ et $n_0 \equiv 6[12]$

Donc, n est solution de (S) si et seulement si $n \equiv n_0[19]$ et $n \equiv n_0[12]$.

- (b) $n \equiv n_0[19]$ signifie que $(n - n_0)$ est divisible par 19.

$n \equiv n_0[12]$ signifie que $(n - n_0)$ est divisible par 12.

Donc, le système équivaut à $(n - n_0)$ divisible par 19 et par 12.

Or, 19 et 12 sont premiers entre eux, donc $(n - n_0)$ divisible par 19 et 12 équivaut à $(n - n_0)$ divisible par 19×12 .

ce qui est équivalent à $n \equiv n_0[19 \times 12]$.

Voir remarque à la fin de cet exercice.

3. (a) Pour déterminer un couple solution de $19u + 12v = 1$, on peut utiliser l'algorithme d'Euclide.

$$19 = 1 \times 12 + 7, \quad 12 = 1 \times 7 + 5, \quad 7 = 1 \times 5 + 2, \quad 5 = 2 \times 2 + 1$$

Ce qui conduit à $-5 \times 19 + 8 \times 12 = 1$, d'où une solution $(-5 ; 8)$.

On peut aussi passer par les congruences et voir que si $(u; v)$ est solution,

alors $19u \equiv 1[12]$. Or, $19u \equiv 7u[12]$ et $7 \times 7 \equiv 1[12]$.

D'où une autre solution, $(7 ; -11)$.

Pour la solution $(-5 ; 8)$, la valeur de N correspondante est : $N = 678$.

Pour la solution $(7 ; -11)$, la valeur de N correspondante est: $N = -918$.

- (b) D'après le résultat de la question 2.b), on peut alors dire que n est solution de (S) si et seulement si:

$$n \equiv 678[12 \times 19] \text{ ou bien } n \equiv -918[12 \times 19]$$

C'est à dire, n de la forme $228k + 678$ ou $228k - 918$, avec k entier relatif quelconque.

Comme $678 \equiv 222[228]$ ou encore $-918 \equiv 222[228]$, on peut tout aussi bien dire que n est solution de (S) si et seulement si $n = 228k + 222$ avec k entier relatif quelconque.

4. L'entier n vérifie ces conditions si et seulement si $n \equiv 13[19]$ et $n \equiv 6[12]$.

Donc, si et seulement si n est solution de (S) , donc si et seulement si $n = 228k + 222$, avec k dans \mathbb{Z} .

Comme $222 \in \{0; 1; 2; \dots; 227\}$, l'écriture $n = 228k + 222$ est la division euclidienne de n par 228.

Donc, le reste de cette division est 222.

Petites remarques concernant l'exercice de Spécialité

1. L'exercice proposait de résoudre l'équation

$$(S) : \begin{cases} n \equiv 13 & [19] \\ n \equiv 6 & [12] \end{cases}$$

On a en fait un résultat très général, connu sous le nom de *Théorème des restes chinois*

Etant donné deux entiers naturels premiers entre m et n et supérieurs à 2. Alors, pour tout couple (a, b) d'éléments de \mathbb{Z} , il existe x dans \mathbb{Z} tel que	
$\begin{cases} x \equiv a & [m] \\ x \equiv b & [n] \end{cases}$	
De plus, pour tout $y \in \mathbb{Z}$, on a :	$\begin{cases} y \equiv a & [m] \\ y \equiv b & [n] \end{cases} \iff y \equiv x & [mn]$

2. Le Théorème de Gauss a deux conséquences classiques dont une est utilisée dans cet exercice.

- (a) Si a et b sont premiers entre eux et si c est divisible par a et b
alors c est divisible par ab .

Effectivement, on a :

Il existe q et q' dans \mathbb{Z} tels que $c = q.a$ et $c = q'.b$.

De plus, d'après Bezout, il existe u et v dans \mathbb{Z} tels que $au + bv = 1$.

En multipliant par c , on obtient alors :

$acu + bcv = c$ d'où $(q'.b)au + (q.a)bv = c$ d'où : $ab(q'.u + q.v) = c$.

c est donc bien divisible par ab .

- (b) Si p est un nombre premier qui divise ab avec a et b dans \mathbb{Z} ,
alors p divise a ou b .

Ce résultat vient directement du fait que, si p premier ne divise pas un entier n , alors p et n sont premiers entre eux.

Donc, si p divise ab mais ne divise pas (par exemple) b , alors p et b sont premiers entre eux, donc, d'après Gauss, p divise a .

Exercice 4

On sait que la probabilité de crever le ballon sur un tir est 0,2.

Donc la probabilité de ne pas crever le ballon sur un tir est 0,8.

De plus, les tirs successifs sont supposés indépendants.

1. Appelons C_k l'événement "le ballon est crevé au k -ème tir.

L'événement contraire de C_k est noté $\overline{C_k}$.

Par hypothèse, les événements C_k et C_m sont indépendants si $k \neq m$.

- (a) L'événement "Le ballon est intact au bout de 2 tirs" est " $\overline{C_1} \cap \overline{C_2}$ ".

Comme $\overline{C_1}$ et $\overline{C_2}$ sont indépendants, on a :

$$P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = P(\overline{C_1}) \times P(\overline{C_2}) = 0,8 \times 0,8 = 0,64$$

Donc, la probabilité d'avoir un ballon intact au bout de 2 tirs est 0,64.

- (b) Il faut bien comprendre la question ! On veut la probabilité que 2 tirs suffisent pour crever le ballon, et non la probabilité que 2 tirs soient nécessaires pour crever le ballon ! L'événement contraire de "2 tirs suffisent pour crever le ballon" est "Ballon non crevé après 2 tirs".

On a donc: Probabilité que 2 tirs suffisent pour crever le ballon = $1 - 0,64 = 0,36$.

- (c) C'est la même démarche que pour la question précédente.

L'événement " n tirs suffisent pour crever le ballon" est le contraire de "Ballon non crevé après n tirs".

Or, l'événement "Ballon non crevé après n tirs" est $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \dots \cap \overline{C_n}$.

Ces événements sont indépendants 2 à 2, et ont tous pour probabilité 0,8, donc:

$$P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \dots \cap \overline{C_n}) = (0,8)^n$$

D'où : Probabilité que n tirs suffisent pour crever le ballon = $1 - (0,8)^n$

Donc, $p_n = 1 - (0,8)^n$.

- (d) On cherche n tel que $p_n > 0,99$, c'est à dire, tel que $1 - (0,8)^n > 0,99$ ou encore, tel que

$$(0,8)^n < 0,01$$

En utilisant alors la fonction \ln qui strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, on a alors:

$$n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}$$

D'où, comme n est entier,

$$n \geq 21$$

- (e) Passons par l'événement contraire, et les probabilités conditionnelles.

La probabilité P_k qu'en lançant le dé, on obtienne la face k , pour $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ est

$$P_k = \frac{1}{4}$$

Donc, la probabilité de ne pas crever le ballon, sachant que la face k a été obtenue est

$$\frac{1}{4} \times (0,8)^k$$

Donc, d'après la loi des probabilités totales, la probabilité de ne pas crever le ballon est

$$\sum_{k=1}^4 \frac{1}{4} \times (0,8)^k = \frac{1}{4} \times 0,8 \times \frac{1 - (0,8)^4}{1 - (0,8)} = 0,5904$$

D'où, la probabilité de crever le ballon est

$$1 - 0,5904 = 0,4096$$

(f) Rien de spécial ... on fait le calcul des fréquences ...

Face k	1	2	3	4
Nombres de sorties de la face k	58	49	52	41
Fréquence f_k	0,29	0,245	0,26	0,205

(g) D'où le calcul de d^2 .

$$d^2 = \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1}{4} - f_k \right)^2$$

$$d^2 = (0,29 - 0,25)^2 + (0,245 - 0,25)^2 + (0,26 - 0,25)^2 + (0,205 - 0,25)^2 = 0,00375$$

(h) On constate que $d^2 > D_9$, donc la valeur de d^2 est conforme avec 90% des résultats de la simulation sur un dé bien équilibré.

Donc, en acceptant un risque de 10%, on ne peut pas considérer que le dé soit pipé.