DOSSIER Alg 4	Thème : Nombres complexes

L'exercice

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.
On appelle A et B les points d'affixes respectives – 1 et 1.
Soit M un point d'affixe z différente de 0 ; on note N le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

1. Montrer que : $AM = AN \times OM$ et exprimer $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON})$ en fonction de $\arg(z)$.

Dans toute la suite, on suppose que le point M appartient au cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

2. a) Montrer que : $|z|^2 = z + \overline{z} + 1$.
b) En déduire AM en fonction de OM, puis calculer AN.
c) Exposer une méthode de construction du point N à partir d'un point M donné.

3. a) Montrer que : $1 - \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{|z|^2}(z+1)$, et en déduire que $\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
b) Quand M n'appartient pas à la droite (AB), donner la nature du quadrilatère $ANBM$.
c) Montrer que $NB = AM$ si et seulement si $|z| = 1$. Préciser alors les deux positions possibles du point M, puis montrer que le quadrilatère $ANBM$ est un carré.

La réponse d'un élève aux questions 1 et 2

1. $\overrightarrow{AN}$ a pour affixe $\dfrac{1}{z} + 1$ et $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z, donc $\overrightarrow{AN} \times \overrightarrow{OM}$ a pour affixe $\left(\dfrac{1}{z} + 1\right) \times z$,
soit $z + 1$: c'est l'affixe de $\overrightarrow{AM}$ donc $AM = AN \times OM$.
L'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON})$ est l'argument de $\overrightarrow{ON}$, et donc de $\dfrac{1}{z} - 0 = \dfrac{1}{z}$.
Puisque $\arg \dfrac{1}{z} = \arg 1 - \arg z$, on a : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON}) = 2\pi - \arg(z)$.

2. a) $/z/^2 = x^2 + y^2$ et $z + \overline{z} + 1 = x + iy + x - iy + 1 = 2x + 1$.
C'est égal, parce que $x^2 + y^2 = 2x + 1$ est l'équation du cercle.
b) $AM = /z + 1/ = /z/ + 1 = OM + 1$, donc $OM + 1 = AN \times OM$, et
$AN = \dfrac{OM + 1}{OM} = 1 + \dfrac{1}{OM}$.
c) On connaît l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON})$ et on reporte $1 + \dfrac{1}{OM}$ pour avoir le point N.

Le travail à exposer devant le jury

1. Analyser la production de l'élève en mettant en évidence ses connaissances et savoir-faire dans le domaine des nombres complexes.
2. Proposer une correction de la question 3, comme vous la feriez devant une classe de Terminale scientifique.
3. On suppose que le point M appartient à la droite d d'équation $x = 1$. On veut faire conjecturer à quel ensemble de points appartient le point N, puis le démontrer : exposer comment vous conduiriez cette recherche dans une classe de Terminale scientifique.
4. Présenter deux exercices se rapportant au thème « **Nombres complexes** ».