

**DOSSIER An 2**

**Thème : Fonctions**  
**Utilisation des variations d'une fonction**

***L'exercice***

1) Pour tout réel  $x > 0$ , on pose :  $f(x) = x - 1 - \ln(x)$ .

Etudier les variations de la fonction  $f$  et en déduire que, pour tout réel  $x > 0$ , on a :

$$\ln(x) \leq x - 1.$$

2) Soit  $a, b$  et  $c$  des réels strictement positifs : on pose  $m = \frac{a + b + c}{3}$ .

En appliquant l'inégalité précédente aux réels  $\frac{a}{m}$ ,  $\frac{b}{m}$  et  $\frac{c}{m}$ , montrer que :

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$$

***La réponse de deux élèves à la question 1***

***Elève 1***



*J'ai tracé sur ma calculatrice la courbe de la fonction  $\ln$  et celle de  $x-1$  et je vois que le logarithme est toujours en dessous de la droite. Donc  $\ln(x) \leq x - 1$  pour tout réel  $x > 0$ .*

***Elève 2***

*Je calcule la dérivée de  $f$*

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \text{ donc } f'(x) = 0 \text{ pour } x = 1.$$

*On peut faire le tableau de variation :*

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

***Le travail à exposer devant le jury***

1. Analyser la production de ces deux élèves, en mettant en évidence les compétences dont ils font preuve et en interprétant l'origine de leurs éventuelles erreurs.
2. Présenter une réponse à la question 2, comme vous l'exposeriez devant une classe de Terminale S.
3. Présenter au moins deux méthodes différentes permettant de démontrer que, pour tous réels strictement positifs  $a$  et  $b$ , on a :  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$ .
4. Proposer deux exercices se rapportant au thème « **Utilisation des variations d'une fonction** ».