| DOSSIER An 3 | Thème : Fonctions – Etude locale |
|---|---|

## L'exercice

Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'intervalle ]-2 ; 2[ par :

$$f(x) = \frac{1}{2x}\, ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) \text{ pour } x \neq 0, \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}.$$

On note ($C$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé ($O$ ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan, d'unité 4 cm.

1) Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Que peut – on en déduire pour ($C$) ?
2) Déterminer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction $g$ définie sur ]-2 ; 2[ par : $g(x) = ln(2+x) - ln(2-x)$.
   En déduire le développement limité à l'ordre 4 de $f$ en 0.
3) a) Montrer que $f$ est dérivable en 0.
   b) Montrer que la courbe représentative ($C$) de $f$ est tangente à la parabole ($P$) d'équation $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2$ au point $A$ de coordonnées $(0 ; \frac{1}{2})$.
   c) Préciser les positions relatives de ($C$) et de ($P$) au voisinage de $A$.
4) Soit $h$ la fonction numérique définie sur [0 ; 2[ par : $h(x) = \frac{4x}{4-x^2} - ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.
   Etudier les variations de $h$ sur [0 ; 2[, puis en déduire le signe de $h(x)$ sur [0 ; 2[.
5) Calculer la dérivée de $f$ sur [0 ; 2[, et l'exprimer à l'aide de $h(x)$.
   En déduire le tableau de variation de $f$.
6) Tracer ($C$) et ($P$) dans le plan.

## La solution proposée par un élève à la question 2

*Avec le cours : ln (2 + x) = ln (1 + (1 + x))= ln (1 + u), avec u = 1 + x.*

*Donc :* $ln(2+x) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5}$

$$= 1 + x - \frac{1}{2}(1+x)^2 + \frac{1}{3}(1+x)^3 - \frac{1}{4}(1+x)^4 + \frac{1}{5}(1+x)^5.$$

*On fait pareil* : $ln(2-x) = 1 - x - \frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{1}{3}(1-x)^3 - \frac{1}{4}(1-x)^4 + \frac{1}{5}(1-x)^5.$

*Donc* : $g(x) = 2x - \frac{1}{2}(1+x)^2 + \frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{1}{3}(1+x)^3 - \frac{1}{3}(1-x)^3 - \frac{1}{4}(1+x)^4 + \frac{1}{4}(1-x)^4$

$\frac{1}{5}(1+x)^5 - \frac{1}{5}(1-x)^5.$

*et* $g(x) = 2x - 2x + 2x + \frac{2}{3}x^3 - 8x - 8x^3 + 2x + 4x^3 + \frac{2}{5}x^5 = -4x - \frac{26}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + x^5\,\varepsilon(x).$

*On divise par* $2x$ : $f(x) = -2 - \frac{13}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + x^4\,\varepsilon(x).$

## *Le travail à exposer devant le jury*

**1.** Représenter ($C$) et ($P$) à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.
**2.** Analyser la réponse de l'élève à la question 2 en mettant en évidence les compétences acquises dans le domaine des développements limités et en précisant l'origine de ses éventuelles erreurs.
**3.** Proposer une correction de la question 3 telle que vous l'exposeriez devant une classe de STS.
**4.** Proposer deux autres exercices se rapportant au thème « **Fonctions – étude locale** ».