

**DOSSIER An 6**

**Thème : Suites et fonctions**

### ***L'exercice***

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; 2]$  par :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

- 1) Etudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 2]$ .
- 2) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- 2.a) Quelle(s) conjecture(s) peut – on émettre sur la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?
2. b) Montrer que, pour tout entier  $n$ , on a :  $1 \leq u_n \leq 2$ .
- 2.c) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
- 2.d) Conclure.

### ***La solution proposée par un élève à la question 2.b***

$$1 \leq u_n \leq 2$$

*Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie pour  $n = 0$ .*

*$u_0 = 2$ , or  $2 \leq 2$  et même  $2 = 2$ . La propriété s'initialise.*

*Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour tout entier  $p \geq 0$ .*

*On veut montrer qu'elle est encore vraie au rang  $p + 1$  donc*

$$1 \leq p \leq 2$$

$$2 \leq 2 u_p \leq 4$$

$$3 \leq 2 u_p + 1 \leq 5 \text{ et } 2 \leq u_p + 1 \leq 3$$

*Comme les nombres sont positifs, on peut diviser donc*

$$1 \leq \frac{3}{2} \leq \frac{2 u_p + 1}{u_p + 1} \leq \frac{5}{3} \leq 2$$

*Conclusion : la propriété s'initialise pour  $n = 0$  et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout  $n \geq 0$ .*

### ***Le travail à exposer devant le jury***

1. Quelles sont les connaissances et les compétences mises en œuvre dans cet exercice ?
2. Analysez la production de l'élève, en particulier la pertinence de la démarche engagée, la clarté de la rédaction, l'origine des erreurs éventuelles.
3. Proposez une correction de la question 2.c) telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.
4. Présentez deux ou trois exercices sur le thème « **Suites et fonctions** ».