
LEÇONS SUR LES CONIQUES

On a intérêt à travailler simultanément sur les quatre leçons ayant trait aux coniques :

1. Définitions de la parabole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions. Construction de la tangente et de la normale en un point.
2. Définitions de l'ellipse, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.
3. Définitions de l'hyperbole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.
4. Exemples de représentation paramétrique des coniques ; construction de la tangente et de la normale en un point à une parabole, une ellipse, une hyperbole.

Comment utiliser ces notes ? — J'ai essayé de faire le bilan des différents exposés présentés au tableau et de développer les remarques orales.

- La **synthèse** regroupe les connaissances essentielles qui doivent venir à l'esprit à la lecture des titres de ces leçons ; les plans que l'on peut adopter s'en déduisent.
- J'expose ensuite les **éléments fondamentaux des trois premières leçons**, qui en constituent le cœur.
- Je poursuis avec un certain nombre de **compléments**. Certains trouvent naturellement leur place à la fin de l'une des trois premières leçons ou permettent de construire le quatrième exposé ; d'autres sont proposés à titre d'enrichissement et/ou pour préparer la discussion avec le jury.
- Finalement, je propose quelques **liens avec d'autres leçons**. *Attention ! Comme tout ce que vous direz devant le jury est susceptible de donner lieu à des questions, mentionner une application aux coniques dans telle ou telle leçon suppose d'être en mesure d'en parler.*

Les définitions et les énoncés des théorèmes doivent être connus. Plutôt que d'apprendre par cœur les démonstrations, il faut en retenir les idées essentielles et s'entraîner à les reconstituer avec précision.

I. Synthèse

1. Partie commune aux trois premières leçons — L'intitulé conduit naturellement à *définir* une parabole/ellipse/hyperbole comme un lieu géométrique en termes de directrice, foyer et excentricité, puis à *caractériser* ces courbes par leurs équations réduites. On terminera en tirant quelques conséquences de l'équation réduite :

- tracé de la conique en la voyant comme le graphe d'une (ou de deux) fonction(s),
- détection des symétries (cf. 2.4 et 3.2),
- existence d'une tangente en tout point (cf. 3.7),
- obtention d'un paramétrage (cf. 3.6).

Cette partie commune n'est pas particulièrement difficile, mais il faut faire preuve de rigueur et de cohérence (comme toujours...).

- (i) Si l'on dessine la courbe tout de suite après avoir donné sa définition géométrique, cela signifie que l'on est capable de déterminer son allure sans recourir à l'équation réduite.

Ceci peut effectivement se faire en étudiant l'intersection avec les droites parallèles ou perpendiculaires à la directrice. C'est très facile pour une parabole, un tout petit peu moins pour une ellipse ou une hyperbole (cf. 3.1). Si l'on ne veut pas avoir à en parler, il faut s'abstenir de tracer la courbe avant de disposer de son équation réduite.

- (ii) Lorsqu'on détermine l'équation réduite d'une conique, il faut bien prendre garde à raisonner par conditions *nécessaires et suffisantes* (cf. 2.2, démonstration des théorèmes).

(iii) Si l'on veut parler de la tangente ou de la normale en un point, il faut commencer par établir leur existence.

2. Spécificités — Pour la **parabole**, l'intitulé impose de parler de la tangente et de la normale en un point. Pour cela, on commence par établir l'*existence* d'une tangente en tout point en utilisant l'équation réduite, puis on donne une propriété géométrique permettant de la construire (cf. **3.8**). La normale en un point se définit comme la perpendiculaire à la tangente passant par ce point.

Pour l'**ellipse**, il est intéressant de mentionner le fait qu'il s'agit de l'*image d'un cercle par une affinité orthogonale*. C'est une simple interprétation géométrique de l'équation réduite, dont on peut déduire un procédé de construction de l'ellipse et de ses tangentes, ainsi qu'un paramétrage (cf. **3.4** et **3.6**).

Pour l'**hyperbole**, on pourra s'intéresser aux *asymptotes*, qui se déterminent très simplement à partir de l'équation réduite. Elles constituent les axes d'un repère cartésien, généralement pas ortho-normé, dans lequel l'équation prend sa forme la plus simple : $xy = 1$. On en déduit facilement le paramétrage classique de l'hyperbole par les fonctions cosh et sinh (cf. **3.5** et **3.6**).

Enfin, pour l'**ellipse** et l'**hyperbole**, on peut donner la caractérisation bifocale. L'intérêt réside dans l'application au tracé de la conique et à l'étude de ses tangentes. *Mise en garde : la démonstration est un peu délicate* (cf. **3.10** et **3.11**).

3. Paramétrage et tangentes (quatrième leçon) — On peut commencer en rappelant la définition géométrique en termes de directrice, foyer et excentricité, qui a le mérite de fournir une présentation unifiée des trois types de coniques, puis donner (sans démonstration) leurs équations réduites. Ceci étant fait, expliquer comment obtenir un paramétrage à partir d'une équation réduite dans chacun des cas (cf. **3.6**) et en déduire l'existence d'une tangente en tout point (**3.7**). Terminer en donnant une méthode de construction des tangentes ; pour ce faire, le point de vue foyer/directrice est très avantageux en cela qu'il permet de formuler un théorème général que l'on démontre facilement à l'aide de coordonnées (cf. **3.9**) :

Soit \mathcal{C} une conique de directrice D , de foyer F et d'excentricité e . Si M est un point de \mathcal{C} n'appartenant pas à l'axe focal, alors la droite (MF) intersecte D en un point P et la droite (PM) est la tangente à \mathcal{C} au point M .

Une autre présentation possible peut débiter par une définition des coniques via leurs équations réduites, ce qui permet d'obtenir un paramétrage (cf. **3.6**) et d'établir l'existence d'une tangente en tout point. Parler rapidement des tangentes à une parabole (cf. **3.8**). Énoncer finalement la caractérisation bifocale des ellipses/hyperboles (cf. **3.10**) et établir les propriétés angulaires des tangentes/normales qui s'en déduisent (cf. **3.11**).

II. Éléments fondamentaux des trois premières leçons

Prérequis / Cadre – Les coniques semblent avoir totalement disparu des programmes de l'enseignement secondaire ; il y a quelques années, elles étaient étudiées en Terminale S, spécialité mathématiques.

Présentation au niveau de la fin d'une Terminale scientifique, pour laquelle on fera appel à l'ensemble des connaissances de géométrie plane du secondaire. Dans tout ce qui suit, on désigne par Π un plan affine euclidien.

2.1. Axe focal — On considère une conique \mathcal{C} de foyer F , de directrice D et d'excentricité $e \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\mathcal{C} = \{M \in \Pi \mid MF = e \cdot d(M, D)\}.$$

Proposition 1 — La droite $\Delta = F + \overrightarrow{D}^\perp$ est un axe de symétrie de \mathcal{C} .

Démonstration. Soit σ la réflexion par rapport à Δ . On a $\sigma(F) = F$ et $\sigma(D) = D$, d'où

$$\sigma(M)F - e \cdot d(\sigma(M), D) = \sigma(M)\sigma(F) - e \cdot d(\sigma(M), \sigma(D)) = MF - e \cdot d(M, D)$$

pour tout point M du plan puisque σ est une isométrie. Comme $\sigma \circ \sigma = \text{id}$, on en déduit :

$$M \in \mathcal{C} \iff \sigma(M) \in \mathcal{C} \iff M \in \sigma(\mathcal{C})$$

et donc $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. □

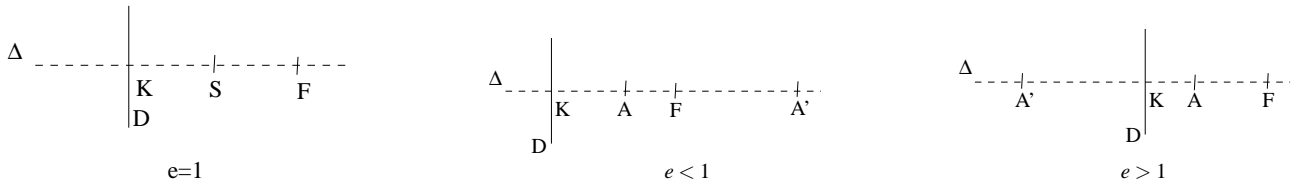
C'est cette propriété remarquable qui justifie que l'on donne un nom à Δ : l'axe focal.

L'axe focal Δ intersecte la directrice D en un point K . Un point M de Δ appartient à \mathcal{C} si et seulement si $MF = e \cdot MK$, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{MF} = \pm e \cdot \overrightarrow{MK}$.

(i) Il y a une unique solution si $e = 1$: le milieu S de $[FK]$.

(ii) Si $e \neq 1$, il y a deux solutions : $A = \text{bar}\{(F; 1), (K; e)\}$ et $A' = \text{bar}\{(F; 1), (K; -e)\}$.

En particulier : l'ensemble \mathcal{C} est toujours *non vide* (ce qui n'est pas évident *a priori*).



2.2. Obtention d'une équation réduite — Introduisons le repère orthonormé $\mathcal{R}_0 = (K; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{KF}}{KF}$ et notons $d = FK = d(F, D)$ l'abscisse du point F .

Pour tout point M du plan de coordonnées (u, v) dans \mathcal{R}_0 ,

$$MF^2 - e^2 \cdot d(M, D)^2 = (u - d)^2 + v^2 - e^2 u^2 = \begin{cases} v^2 - 2d(u - \frac{d}{2}) & \text{si } e = 1; \\ (1 - e^2) \left(u - \frac{d}{1 - e^2}\right)^2 + v^2 - \frac{e^2 d^2}{1 - e^2} & \text{si } e \neq 1. \end{cases}$$

(i) **Parabole** — Soit $S = K + \frac{d}{2} \vec{i}$ le milieu du segment $[KF]$ et soit $\mathcal{R} = (S; \vec{i}, \vec{j})$.

Théorème 2 — La parabole \mathcal{C} est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$ vérifient l'équation $y^2 - 2dx = 0$.

Démonstration. Notant (x, y) les coordonnées dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$, on a $x = u - \frac{d}{2}$, $y = v$ et $MF^2 - e^2 \cdot d(M, D)^2 = y^2 - 2dx$ pour tout point M du plan. Par suite :

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \iff y^2 - 2dx = 0. \quad \square$$

(ii) **Ellipse** — Les points $A = \text{bar}\{(F; 1), (K; e)\}$ et $A' = \text{bar}\{(F; 1), (K; -e)\}$ ont pour coordonnées respectives $(\frac{d}{e+1}, 0)$ et $(\frac{d}{1-e}, 0)$ dans \mathcal{R}_0 , donc le point $O = K + \frac{d}{1-e^2} \vec{i}$ est le milieu du segment $[AA']$.

Théorème 2bis — L'ellipse \mathcal{C} est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ vérifient l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

où $a = \frac{ed}{1-e^2}$ et $b = \frac{ed}{\sqrt{1-e^2}}$.

Démonstration. Notant (x, y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$, on a $x = u - \frac{d}{1-e^2}$, $y = v$ et $MF^2 - e^2 \cdot d(M, D)^2 = (1 - e^2)x^2 + y^2 - \frac{e^2 d^2}{1-e^2}$ pour tout point M du plan. Par suite,

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a = \frac{ed}{1-e^2}$, et $b = \frac{ed}{\sqrt{1-e^2}}$. □

On a $a, b > 0$; en outre, $a > b$ car $\sqrt{1-e^2} > 1-e^2$ puisque $0 < 1-e^2 < 1$. L'abscisse du point F dans le repère \mathcal{R} est

$$d - \frac{d}{1-e^2} = -\frac{e^2 d}{1-e^2} = -ae = -\sqrt{a^2 - b^2}$$

et celle de la droite D est $h = -\frac{d}{1-e^2} = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. Notons en passant l'excentricité de \mathcal{C} et de la distance d du foyer à la directrice :

$$e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}, \quad d = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Remarques — (i) On aurait pu d'emblée introduire le point O fournissant la « bonne » origine pour notre repère orthonormé. Cependant, il me semble plus simple de travailler dans \mathcal{R}_0 et de faire apparaître « spontanément » le point O via une formule de changement de repère.

(ii) Si l'on veut que le foyer ait une abscisse positive, il suffit de considérer le repère $(O; -\vec{i}, \vec{j})$. Cela revenant à changer x en $-x$, l'équation de \mathcal{C} n'est pas modifiée.

(iii) **Hyperbole** – Les points $A = \text{bar}\{(F; 1), (K; e)\}$ et $A' = \text{bar}\{(F; 1), (K; -e)\}$ ont pour coordonnées respectives $(\frac{d}{e+1}, 0)$ et $(\frac{d}{1-e}, 0)$ dans \mathcal{R}_0 , donc le point $O = K + \frac{d}{1-e^2} \vec{i}$ est le milieu du segment $[AA']$.

Théorème 2ter — L'hyperbole \mathcal{C} est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ vérifient l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

où $a = \frac{ed}{e^2-1}$ et $b = \frac{ed}{\sqrt{e^2-1}}$.

Démonstration. Notant (x, y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$, on a $x = u - \frac{d}{1-e^2}$, $y = v$ et $MF^2 - e^2 \cdot d(M, D)^2 = (1 - e^2)x^2 + y^2 - \frac{e^2 d^2}{1-e^2}$ pour tout point M du plan. Par suite,

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a = \frac{ed}{e^2-1}$, et $b = \frac{ed}{\sqrt{e^2-1}}$. □

On a $a, b > 0$. L'abscisse du point F dans le repère \mathcal{R} est

$$d - \frac{d}{1-e^2} = \frac{e^2 d}{e^2 - 1} = ae = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et celle de la droite D est $h = \frac{d}{e^2-1} = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Notons en passant l'excentricité de \mathcal{C} et de la distance d du foyer à la directrice :

$$e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2.3. Équivalence avec le point de vue géométrique — Il s'agit maintenant d'établir que toute équation cartésienne de l'une des formes ci-dessus, dans un repère orthonormé, définit une conique au sens géométrique. Voici un exemple de rédaction dans le cas d'une ellipse.

Théorème 3 — Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé et soit a, b deux nombres réels tels que $a > b > 0$. L'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ définit une ellipse de foyer $F(-c, 0)$, de directrice la droite D d'équation $x = -h$ et d'excentricité e avec

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad h = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Démonstration. Posons $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $h = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ et $e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$. Notant F le point de coordonnées $(-c, 0)$ et D la droite d'équation $x = -h$, on a

$$MF^2 - e^2 \cdot d(M, D)^2 = (1 - e^2) \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right]$$

pour tout point $M(x, y)$ du plan. Ainsi, l'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ définit l'ellipse de foyer F , de directrice D et d'excentricité e . \square

2.4. Symétries — L'équation réduite d'une ellipse/hyperbole \mathcal{C} étant invariante par les transformations $(x, y) \mapsto (\pm x, \pm y)$, la droite $\Delta' = (O; \vec{j})$ est un second axe de symétrie de \mathcal{C} et le point O en est un centre de symétrie.

On en déduit que le point $F' = \sigma_{\Delta'}(F)$ et la droite $D' = \sigma_{\Delta'}(D)$ fournissent un second couple (foyer, directrice) permettant de définir \mathcal{C} .

III. Compléments

3.1. Allure d'une conique à partir de la définition géométrique et procédé de construction — On peut se faire une première idée de l'allure d'une conique \mathcal{C} de foyer F , de directrice D et d'excentricité e en étudiant ses points d'intersection avec les droites parallèles à D .

Soit D' une droite parallèle à D . Tous les points de D' sont à la même distance de D , égale à la distance $d(D, D')$ de D à D' . Par suite,

$$\mathcal{C} \cap D' = \{M \in \Pi \mid M \in D' \text{ et } MF = e \cdot d(D, D')\}$$

est l'intersection de la droite D' et du cercle de centre F et de rayon $e \cdot d(D, D')$.

L'étude de l'intersection d'un cercle et d'une droite permet d'en déduire :

- (i) $\mathcal{C} \cap D' = \emptyset$ si $d(F, D') > e \cdot d(D, D')$;
- (ii) $\mathcal{C} \cap D'$ est un singleton si $d(F, D') = e \cdot d(D, D')$;
- (iii) $\mathcal{C} \cap D'$ contient deux points si $d(F, D') < e \cdot d(D, D')$. Ces points sont symétriques par rapport à l'axe focal $\Delta = F + \vec{D}^\perp$.

Soit K le projeté orthogonal de F sur D . Toute droite D' parallèle à D s'écrit sous la forme

$$D' = P + \vec{D}$$

avec $P \in \Delta$. On a alors

$$d(D, D') = KP \quad \text{et} \quad d(F, D') = FP.$$

Cas d'une ellipse : $e < 1$ — Introduisons comme en 2.1 les points $A = \text{bar}\{(F; 1), (K; e)\}$ et $A' = \text{bar}\{(F; 1), (K; -e)\}$. Pour tout point $P \in \Delta$,

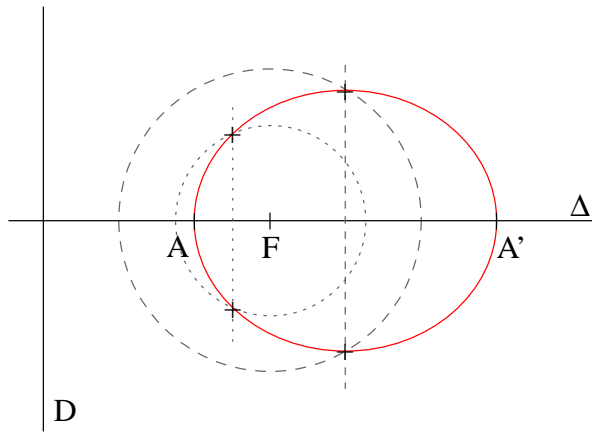
$$FP^2 - e^2 \cdot KP^2 = \left(\overrightarrow{PF} + e \cdot \overrightarrow{PK} \mid \overrightarrow{PF} - e \cdot \overrightarrow{PK} \right) = (1 - e^2) \left(\overrightarrow{PA} \mid \overrightarrow{PA'} \right)$$

et donc, comme $0 < e < 1$,

- (i) $FP > e \cdot KP$ ssi $\left(\overrightarrow{PA} \mid \overrightarrow{PA'} \right) > 0$, donc ssi P est *extérieur* au segment $[AA']$;
- (ii) $FP = e \cdot KP$ ssi $\left(\overrightarrow{PA} \mid \overrightarrow{PA'} \right) = 0$, donc ssi $P = A$ ou $P = A'$;
- (iii) $FP < e \cdot KP$ ssi $\left(\overrightarrow{PA} \mid \overrightarrow{PA'} \right) < 0$, donc ssi P est *intérieur* au segment $[AA']$.

On en déduit que l'ellipse \mathcal{C} est non vide et entièrement contenue entre les deux droites parallèles $A + \overrightarrow{D}$ et $A' + \overrightarrow{D}$. La fonction $M \mapsto d(M, D)$ est par conséquent bornée lorsque M parcourt \mathcal{C} . Comme $MF = e \cdot d(M, D)$, il en est de même de la fonction $M \mapsto MF$ et donc \mathcal{C} est une partie *bornée* du plan.

Cette étude conduit à un *procédé de construction* des points de \mathcal{C} à la règle et au compas (au moins lorsque $e \in \mathbb{Q}$) : placer A et A' sur l'axe focal puis, pour tout point $P \in [AA']$, construire les points d'intersection de la droite $P + \overrightarrow{D}$ avec le cercle de centre F et de rayon $e \cdot d(P, D)$. La figure ci-dessous a été tracée avec $e = \frac{1}{2}$.



Remarque — Il serait sans doute intéressant de programmer cette construction sur une calculatrice graphique.

Cas d'une hyperbole : $e > 1$ — Le raisonnement est le même que pour une ellipse mais la conclusion est opposée puisque maintenant $1 - e^2 < 0$.

- (i) $FP > e \cdot KP$ ssi $\left(\overrightarrow{PA} \mid \overrightarrow{PA'} \right) < 0$, donc ssi P est *intérieur* au segment $[AA']$;
- (ii) $FP = e \cdot KP$ ssi $\left(\overrightarrow{PA} \mid \overrightarrow{PA'} \right) = 0$, donc ssi $P = A$ ou $P = A'$;
- (iii) $FP < e \cdot KP$ ssi $\left(\overrightarrow{PA} \mid \overrightarrow{PA'} \right) > 0$, donc ssi P est *extérieur* au segment $[AA']$.

On en déduit que l'hyperbole \mathcal{C} est contenue dans la réunion des deux demi-plans définis par les conditions $\left(\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{AA'} \right) \leq 0$ et $\left(\overrightarrow{A'M} \mid \overrightarrow{A'A} \right) \leq 0$. Comme \mathcal{C} intersecte toute droite parallèle à D et contenue dans la réunion de ces demi-plans, la fonction $M \mapsto d(M, D)$ n'est pas bornée lorsque M parcourt \mathcal{C} . Ainsi, \mathcal{C} est une partie *non bornée* du plan.

De la même façon que pour une ellipse, cette étude conduit à un *procédé de construction* des points de \mathcal{C} à la règle et au compas (au moins lorsque $e \in \mathbb{Q}$) : placer les points A et A' sur l'axe focal Δ puis, pour tout point P de $\Delta -]AA'[$, construire les points d'intersection de la droite $P + \overrightarrow{D}$ avec le cercle de centre F et de rayon $e \cdot d(P, D)$.

Là encore, il peut être intéressant de programmer cette construction sur une calculatrice graphique.

Cas d'une parabole : $e = 1$ — Pour une parabole, il est plus simple d'étudier ses points d'intersection avec les droites perpendiculaires à la directrice. En effet, pour tout point H de D , $d(M, D) = MH$ et donc

$$\mathcal{C} \cap (H + \vec{D}^\perp) = \{M \in H + \vec{D}^\perp \mid MF = MH\}$$

est l'intersection de la droite $H + \vec{D}^\perp$ avec la médiatrice du segment $[FH]$

On en déduit que \mathcal{C} est incluse dans le demi-plan de frontière D contenant F ; en outre, comme \mathcal{C} intersecte toute droite perpendiculaire à D , la fonction $M \mapsto MF$ n'est pas bornée lorsque M parcourt \mathcal{C} . Ainsi, \mathcal{C} est une partie *non bornée* du plan.

Ce que l'on vient de dire fournit bien évidemment un *procédé de construction* des points de \mathcal{C} à la règle et au compas. Il peut être intéressant de le programmer sur une calculatrice graphique.

3.2. Détermination des isométries préservant une conique — Si \mathcal{C} est une conique de foyer F , de directrice D et d'excentricité e , on observe aisément que la droite $\Delta = F + \vec{D}^\perp$ est un axe de symétrie de \mathcal{C} (cf. 2.1). Lorsque \mathcal{C} est une ellipse ou une hyperbole, l'équation réduite met en évidence un nouvel axe de symétrie Δ' parallèle à D ainsi qu'un centre de symétrie O , intersection de Δ et Δ' .

Il est naturel de se demander s'il existe d'autres isométries préservant \mathcal{C} . Un dessin suggère clairement que non, et il reste à le démontrer. Pour ce faire, il faut comprendre l'effet d'une telle isométrie sur l'axe focal, ce qui nécessite une bonne description de ce dernier.

Cas d'une ellipse — L'observation-clef est la suivante : les sommets A et A' situés sur l'axe focal sont les deux points les plus éloignés de \mathcal{C} .

Lemme 4 — *Quels que soient les points $M, M' \in \mathcal{C}$, on a $MM' \leq AA'$, avec égalité si et seulement si $\{M, M'\} = \{A, A'\}$.*

Démonstration — Considérons une équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ de \mathcal{C} dans un repère orthonormé avec $a > b > 0$. Pour tout point $M(x, y)$ appartenant à \mathcal{C} ,

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2} = a \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}} \leq a \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} = a,$$

avec égalité si et seulement si $y = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $M \in \{A, A'\}$.

Quels que soient alors $M, M' \in \mathcal{C}$, l'inégalité triangulaire implique

$$MM' \leq OM + OM' \leq 2a = AA'.$$

Si $MM' = 2a$, alors les points O, M et M' sont alignés et O est le milieu du segment $[MM']$; ceci implique $MM' = 2OM$, d'où $OM = a$ et donc $M \in \{A, A'\}$. \square

Proposition 5 — *Il y a exactement quatre isométries préservant l'ellipse \mathcal{C} : l'identité, les deux réflexions $\sigma_\Delta, \sigma_{\Delta'}$ et la symétrie centrale σ_O .*

Démonstration. Soit f une isométrie affine telle que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Les deux points $f(A)$ et $f(A')$ de \mathcal{C} sont tels que $f(A)f(A') = AA'$, donc $\{f(A), f(A')\} = \{A, A'\}$ en vertu du lemme précédent. Comme f est une bijection affine, on en déduit que f préserve globalement l'axe focal $\Delta = (AA')$ et fixe le milieu O de $[AA']$.

Si $f(A) = A$ et $f(A') = A'$, alors f fixe chaque point de Δ et il y a deux possibilités : $f = \text{id}$ ou $f = \sigma_\Delta$.

Si $f(A) = A'$ et $f(A') = A$, alors $g = \sigma_{\Delta'} \circ f$ est une isométrie préservant \mathcal{C} qui fixe A et A' . D'après ce que l'on vient de voir, ceci implique $g = \text{id}$ ou $g = \sigma_\Delta$ et l'on obtient finalement $f = \sigma_{\Delta'}$ ou $f = \sigma_{\Delta'} \circ \sigma_\Delta = \sigma_O$. \square

Cas d'une hyperbole — L'observation-clef est la suivante : les sommets A et A' situés sur l'axe focal appartiennent à des branches distinctes et, sous cette condition, ce sont les deux points de \mathcal{C} les plus proches.

Lemme 4bis — (i) Toute isométrie affine f telle que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ transforme une branche de \mathcal{C} en une branche de \mathcal{C} .

(ii) Quels que soient les points M et M' appartenant à des branches distinctes de \mathcal{C} , on a $MM' \geq AA'$, avec égalité si et seulement si $\{M, M'\} = \{A, A'\}$.

Démonstration. (i) Il suffit d'observer que les deux branches \mathcal{C}_\pm de \mathcal{C} sont ses composantes connexes. L'application f étant continue, $f(\mathcal{C}_?)$ est connexe ($? \in \{-, +\}$) et donc $f(\mathcal{C}_?) \subset \mathcal{C}_+$ ou $f(\mathcal{C}_?) \subset \mathcal{C}_-$; en appliquant le même argument à f^{-1} , on obtient $f(\mathcal{C}_?) = \mathcal{C}_+$ ou $f(\mathcal{C}_?) = \mathcal{C}_-$.

(ii) Considérons une équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ de \mathcal{C} dans un repère orthonormé avec $a, b > 0$. Étant donné deux points $M(x, y)$ et $M(x', y')$ appartenant à des branches distinctes de \mathcal{C} ,

$$MM' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \geq |x-x'| \geq 2a = AA'$$

car x, x' sont des nombres réels de signes opposés tels que $|x|, |x'| \geq a$. Si cette inégalité est une égalité, alors $|x| = |x'| = a$ et donc $\{M, M'\} = \{A, A'\}$. \square

Proposition 5bis — Il y a exactement quatre isométries préservant l'hyperbole \mathcal{C} : l'identité, les deux réflexions $\sigma_\Delta, \sigma_{\Delta'}$ et la symétrie centrale σ_O .

Démonstration. Soit f une isométrie affine telle que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Les deux points $f(A)$ et $f(A')$ de \mathcal{C} appartiennent à des branches différentes de l'hyperbole en vertu du point (i) du lemme précédent. Ils sont en outre tels que $f(A)f(A') = AA'$, donc $\{f(A), f(A')\} = \{A, A'\}$ d'après le point (ii). Comme f est une bijection affine, on en déduit que f préserve globalement l'axe focal $\Delta = (AA')$ et fixe le milieu O de $[AA']$.

La fin de la démonstration est rigoureusement la même que dans le cas d'une ellipse. \square

Cas d'une parabole — Il y a plusieurs manières de caractériser l'axe focal d'une parabole ; en voici une, qui repose sur le fait qu'il existe une normale N_P en tout point P (justification : équation réduite).

Lemme 4ter — Le sommet d'une parabole \mathcal{C} est l'unique point P de \mathcal{C} tel que $N_P \cap \mathcal{C} = \{P\}$.

Démonstration. Soit S le sommet de \mathcal{C} . La normale à \mathcal{C} au point S est l'axe focal Δ , lequel intersecte \mathcal{C} en S uniquement.

Soit maintenant P un point de \mathcal{C} distinct de S et considérons une équation réduite $y^2 - 2dx = 0$ de \mathcal{C} dans un repère orthonormé ($d > 0$). Les coordonnées (x_0, y_0) de P sont telles que $y_0 \neq 0$. La tangente T_P à \mathcal{C} en P est la droite d'équation $d(x-x_0) - y_0(y-y_0) = 0$ et la normale N_P est la droite d'équation $y_0(x-x_0) + d(y-y_0) = 0$. Les ordonnées des points de $\mathcal{C} \cap N_P$ sont les racines du trinôme

$$F(Y) = y_0 \left(\frac{Y^2}{2d} - x_0 \right) + d(Y - y_0) = \frac{y_0}{2d} Y^2 + dY + y_0 \left(\frac{y_0^2}{2d} - d \right).$$

L'une des racines est y_0 puisque P appartient à $N_P \cap \mathcal{C}$ par construction. Comme $F'(y_0) = \frac{y_0^2}{d} + d = \frac{y_0^2 + d^2}{d} \neq 0$, cette racine est simple ; la seconde racine du trinôme est donc distincte de y_0 , ce qui signifie que N_P intersecte \mathcal{C} en deux points distincts. \square

Proposition 5ter — Il y a exactement deux isométries préservant la parabole \mathcal{C} : l'identité et la réflexion σ_Δ .

Démonstration. Soit f une isométrie affine telle que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Comme toute bijection affine, f préserve les tangentes : $f(T_P) = T_{f(P)}$ pour tout point P de \mathcal{C} . Puisque f préserve en outre l'orthogonalité, $f(N_P) = N_{f(P)}$. Appliquant ceci avec $P = S$, nous obtenons

$$N_{f(S)} \cap \mathcal{C} = f(N_S) \cap f(\mathcal{C}) = f(N_S \cap \mathcal{C}) = f(\{S\}) = \{f(S)\}.$$

Ceci implique $f(S) = S$ en vertu du lemme précédent, puis $f(\Delta) = f(N_S) = N_S = \Delta$.

Il y a quatre possibilités : $f = \text{id}$, $f = \sigma_\Delta$, $f = \sigma_S$ et $f = \sigma_{S+\vec{\Delta}^\perp}$. Les deux dernières sont exclues car ces isométries échangent les deux demi-plans de frontière $S + \vec{\Delta}^\perp$ alors que \mathcal{C} est entièrement contenue dans l'un d'eux. \square

3.3. Unicité de l'équation réduite — Une fois qu'on a démontré que toute conique possède une équation réduite dans un repère orthonormé convenable (cf. 2.2), il est naturel de se demander si cette équation est unique (*oui*) et si ce repère est uniquement déterminé (*presque*). Les réponses peuvent s'obtenir très facilement une fois que l'on a déterminé toutes les isométries préservant une conique (cf. 3.2).

Proposition 6 — Soit \mathcal{C} une parabole et supposons qu'il existe deux repères orthonormés $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$ dans lesquels \mathcal{C} soit décrite par des équations réduites $y^2 - 2dx = 0$ et $y'^2 - 2d'x' = 0$ avec $d, d' > 0$. Alors $d = d'$ et

$$O' = O, \quad \vec{i}' = \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{j}' = \pm \vec{j}.$$

Démonstration. Les équations réduites montrent que les droites $(O; \vec{i})$ et $(O; \vec{i}')$ sont des axes de symétrie de \mathcal{C} . D'après la proposition 5ter, ces droites sont égales ; on en déduit :

- $O' = O$, car O (resp. O') est l'unique point d'intersection de \mathcal{C} avec $(O; \vec{i})$ (resp. avec $(O'; \vec{i}')$) ;
- $\vec{i}' = \pm \vec{i}$, puis $\vec{i}' = \vec{i}$ car les abscisses des points de \mathcal{C} sont positives dans chacun des repères ;
- $\vec{j}' = \pm \vec{j}$ par orthogonalité.

On dispose maintenant de deux équations $y^2 - 2dx = 0$ et $y'^2 - 2d'x' = 0$ définissant \mathcal{C} dans le même repère orthonormé. En considérant par exemple le point de coordonnées $(\frac{d}{2}, d)$, on obtient immédiatement $d' = d$. \square

Proposition 6bis — Soit \mathcal{C} une ellipse/hyperbole et supposons qu'il existe deux repères orthonormés $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$ dans lesquels \mathcal{C} soit décrite par des équations réduites $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $\frac{x'^2}{a'^2} \pm \frac{y'^2}{b'^2} = 1$ avec $a, b, a', b' > 0$ (et $a > b, a' > b'$ si \mathcal{C} est une ellipse). Alors $a' = a, b' = b$ et

$$O' = O, \quad \vec{i}' = \pm \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{j}' = \pm \vec{j}.$$

Démonstration. Les équations réduites montrent que les deux points O et O' sont des centres de symétrie de \mathcal{C} tandis que les quatre droites $(O; \vec{i}), (O; \vec{j}), (O'; \vec{i}')$ et $(O'; \vec{j}')$ en sont des axes de symétrie. D'après les propositions 5 et 5bis, ceci implique $O' = O$ et

$$(\vec{i}', \vec{j}') = (\pm \vec{i}, \pm \vec{j}) \quad \text{ou} \quad (\vec{i}', \vec{j}') = (\pm \vec{j}, \pm \vec{i}).$$

On a en fait $\vec{i}' = \pm \vec{i}$ et $\vec{j}' = \pm \vec{j}$. Pour le justifier, il faut distinguer les ellipses des hyperboles :

- si \mathcal{C} est une hyperbole, seuls les axes $(O; \vec{i})$ et $(O'; \vec{i}')$ intersectent \mathcal{C} ;
- si \mathcal{C} est une ellipse, les cordes portées par $(O; \vec{i})$ et $(O'; \vec{i}')$ sont strictement plus longues que celles portées par $(O; \vec{j})$ et $(O'; \vec{j}')$.

On dispose maintenant de deux équations réduites $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $\frac{x'^2}{a'^2} \pm \frac{y'^2}{b'^2} = 1$ décrivant \mathcal{C} dans le même repère orthonormé. En considérant l'intersection de \mathcal{C} avec l'axe des abscisses, il vient immédiatement $a'^2 = a^2$ et donc $a' = a$ puisque $a' > a$. Si \mathcal{C} est une ellipse, le même argument appliqué à l'axe des ordonnées fournit $b' = b$; si \mathcal{C} est une hyperbole, on obtient la même conclusion en considérant les coefficients directeurs des asymptotes. \square

Les deux propositions que l'on vient de démontrer permettent de parler l'équation réduite. Elles affirment en particulier que le coefficient $d > 0$ (resp. les coefficients $a, b > 0$) figurant dans l'équation réduite d'une parabole (resp. d'une ellipse ou d'une hyperbole) est (resp. sont) intrinsèquement associé(s) à \mathcal{C} : il(s) ne dépend(ent) d'aucun choix.

3.4. L'ellipse comme image d'un cercle par une affinité orthogonale — Soit \mathcal{C} une ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $a > b > 0$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui envoie un point de coordonnées (x, y) sur le point de coordonnées $(x, \frac{b}{a}y)$. Il s'agit d'une bijection affine appelée *affinité orthogonale* d'axe $(O; \vec{i})$ et de rapport $\frac{b}{a}$. La bijection réciproque est l'affinité orthogonale d'axe $(O; \vec{i})$ et de rapport $\frac{a}{b}$.

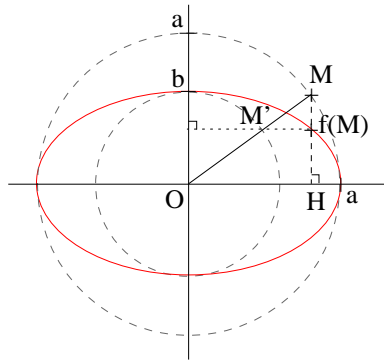
Pour tout point $M(x, y)$ du plan,

$$M \in \mathcal{C} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff x^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2 = a^2 \iff f^{-1}(M) \in C(O, a) \iff M \in f(C(O, a))$$

donc \mathcal{C} est l'image du cercle $C(O, a)$ de centre O et de rayon a par l'application f .

Cette observation élémentaire donne un *procédé de construction* très simple de l'ellipse \mathcal{C} à partir du cercle $C(O, a)$: étant donné un point $M \in C(O, a)$ de projeté orthogonal H sur $(O; \vec{i})$, le point $f(M)$ appartient au segment $[HM]$ et est caractérisé par la relation métrique $f(M)H = \frac{b}{a}MH$.

Le segment $[OM]$ intersecte de cercle $C(O, b)$ en un point M' tel que $\frac{OM'}{OM} = \frac{b}{a}$. On obtient ainsi $\frac{f(M)H}{MH} = \frac{OM'}{OM}$, et il découle alors du théorème de Thalès que la droite $(M'f(M))$ est parallèle à la droite $(O; \vec{i})$. Autrement dit : le point $f(M)$ est l'intersection des droites $(M; \vec{j})$ et $(M'; \vec{i})$.



Remarque — Cette construction de \mathcal{C} à partir du cercle $C(O, a)$ peut se programmer sur une calculatrice graphique.

Ce point de vue conduit naturellement :

- au paramétrage d'une ellipse par des fonctions trigonométriques (cf. 3.6) ;
- à l'existence d'une tangente à une ellipse \mathcal{C} en tout point : le cercle $C(O, a)$ admet en effet une tangente T_M en tout point M et la droite $f(T_M)$ est alors tangente à \mathcal{C} au point $f(M)$ car f est une bijection affine ;
- à une méthode de construction des tangentes à une ellipse \mathcal{C} : pour construire la tangente au point P , il suffit de tracer la droite perpendiculaire à $(Of^{-1}(P))$ passant par $f^{-1}(P)$ (tangente à $C(O, a)$ au point $f^{-1}(P)$), puis de construire son image par l'affinité orthogonale f .

3.5. Asymptotes d'une hyperbole — Soit \mathcal{C} une hyperbole dont l'équation réduite, dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ donné, s'écrit : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$. La factorisation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

incite à poser $X = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ et $Y = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$, qui sont les coordonnées du point $M(x, y)$ dans le nouveau repère cartésien $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$ avec

$$\vec{u} = \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{b}{2}\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{a}{2}\vec{i} - \frac{b}{2}\vec{j}.$$

L'équation cartésienne de \mathcal{C} dans le repère \mathcal{R}' est $XY = 1$. On en déduit immédiatement que les droites $(O; \vec{u})$ et $(O; \vec{v})$ sont deux *asymptotes* de l'hyperbole \mathcal{C} . Dans le repère \mathcal{R} , ces droites ont pour équations respectives $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ et $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

Remarque — Attention : le repère \mathcal{R}' n'est en général pas orthogonal ! En effet : $(\vec{i} | \vec{j}) = a^2 - b^2$, donc les axes de \mathcal{R}' sont perpendiculaires si et seulement si $a = b$, c'est-à-dire si et seulement si l'excentricité de \mathcal{C} est égale à $\sqrt{2}$. Une telle hyperbole est dite *équilatère*.

3.6. Paramétrages — L'équation réduite d'une conique \mathcal{C} permet d'obtenir très facilement un paramétrage.

(i) **Parabole** — Soit \mathcal{C} une parabole dont l'équation réduite, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ donné, s'écrit : $y^2 - 2dx = 0$ avec $d > 0$. On obtient immédiatement un paramétrage de \mathcal{C} en considérant l'application

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \Pi, \quad t \mapsto O + \frac{t^2}{2d} \cdot \vec{i} + t \cdot \vec{j}.$$

(ii) **Ellipse** — Soit \mathcal{C} une ellipse dont l'équation réduite, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ donné, s'écrit : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$. Pour obtenir un paramétrage de \mathcal{C} , il suffit de considérer un paramétrage du cercle de centre O et de rayon a puis de le composer par l'affinité orthogonale $(x, y) \mapsto (x, \frac{b}{a}y)$:

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \Pi, \quad t \mapsto O + a \cos(t) \cdot \vec{i} + b \sin(t) \cdot \vec{j}.$$

(iii) **Hyperbole** — Soit \mathcal{C} une hyperbole dont l'équation réduite, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ donné, s'écrit : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$. Les formules $X = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ et $Y = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$ décrivent un changement de repère : (X, Y) sont les coordonnées de $M(x, y)$ dans le repère $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$, où $\vec{u} = \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{b}{2}\vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{a}{2}\vec{i} - \frac{b}{2}\vec{j}$. L'hyperbole \mathcal{C} est décrite dans \mathcal{R}' par l'équation cartésienne $XY = 1$, donc elle admet le paramétrage évident :

$$\gamma: \mathbb{R}^* \rightarrow \Pi, \quad s \mapsto O + s \cdot \vec{u} + \frac{1}{s} \cdot \vec{v}.$$

Les images des deux intervalles $\mathbb{R}_{>0}$ et $\mathbb{R}_{<0}$ sont les deux branches de \mathcal{C} .

En utilisant la bijection $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, t \mapsto e^t)$ fournie par la fonction exponentielle, on en déduit que les deux branches de \mathcal{C} sont paramétrées par

$$\lambda_+: \mathbb{R} \rightarrow \Pi, \quad t \mapsto O + e^t \cdot \vec{u} + e^{-t} \cdot \vec{v}$$

et

$$\lambda_-: \mathbb{R} \rightarrow \Pi, \quad t \mapsto O - e^t \cdot \vec{u} - e^{-t} \cdot \vec{v}.$$

Finalement, si l'on écrit ces formules dans le repère orthonormé \mathcal{R} , on obtient le paramétrage classique par les fonctions cosh et sinh :

$$\lambda_+: \mathbb{R} \rightarrow \Pi, \quad t \mapsto O + a \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cdot \vec{i} + b \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \vec{j} = O + a \cosh(t) \cdot \vec{i} + \sinh(t) \cdot \vec{j}$$

et

$$\lambda_-: \mathbb{R} \rightarrow \Pi, \quad t \mapsto O - a \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cdot \vec{i} - b \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \vec{j} = O - a \cosh(t) \cdot \vec{i} - \sinh(t) \cdot \vec{j}.$$

3.7. Existence d'une tangente en tout point — L'équation réduite d'une conique \mathcal{C} permet d'établir l'existence d'une tangente (et donc d'une normale) en tout point de \mathcal{C} et d'en obtenir une équation cartésienne. Il y a essentiellement deux manières de le voir :

(i) en exprimant une coordonnée en fonction de l'autre, on écrit \mathcal{C} comme réunion de graphes de fonctions dérivables.

Exemple : Si \mathcal{C} est une hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, \mathcal{C} est la réunion des graphes des deux fonctions dérivables $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \pm a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}$.

(ii) si $F(X, Y)$ est le polynôme figurant dans l'équation réduite, on vérifie que l'on a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial Y}(x_0, y_0) \right) \neq (0, 0)$$

pour tout point $M(x_0, y_0)$ appartenant à \mathcal{C} . La tangente en ce point est alors la droite d'équation cartésienne $\frac{\partial F}{\partial X}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial Y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0$.

Une autre méthode consiste à utiliser les paramétrages obtenus en 3.7 en vérifiant qu'ils sont *réguliers*, c'est-à-dire que le vecteur vitesse ne s'annule jamais.

Il n'y a pas grand chose à dire sur la normale en un point M de \mathcal{C} :

- elle n'existe que si la tangente en ce point existe ;
- si la tangente T_M existe, la normale est par définition la droite perpendiculaire à T_M passant par M .

3.8. Tangentes à une parabole — Soit \mathcal{C} une parabole de foyer F et de directrice D . On sait que \mathcal{C} possède une tangente en tout point M , que l'on note T_M (justification : équation réduite ou paramétrage, cf. 3.7).

Théorème 7 — *Soit M un point de \mathcal{C} . La droite T_M est la médiatrice du segment $[HF]$. C'est également la bissectrice intérieure de l'angle \widehat{FMH} , où H désigne le projeté orthogonal de M sur D .*

Démonstration. Soit $y^2 - 2dx = 0$ une équation réduite de \mathcal{C} dans un repère orthonormé. Le foyer F de \mathcal{C} est le point de coordonnées $(\frac{d}{2}, 0)$ et la directrice est la droite D d'équation $x = -\frac{d}{2}$. (cf. 2.2). La tangente à \mathcal{C} au point $M(x_0, y_0)$ est la droite d'équation cartésienne $d(x - x_0) - y_0(y - y_0) = 0$.

Cette droite est dirigée par le vecteur \vec{u} de coordonnées $\begin{pmatrix} y_0 \\ d \end{pmatrix}$. D'un autre côté, comme $MF = MH$, la médiatrice du segment $[HF]$ est dirigée par le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MH}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{d}{2} - x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} - x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$. On en déduit que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires car

$$\begin{vmatrix} y_0 & -2x_0 \\ d & -y_0 \end{vmatrix} = 2dx_0 - y_0^2 = 0.$$

Ceci démontre que la tangente T_M est la médiatrice du segment $[HF]$. Le triangle (éventuellement aplati) HMF étant isocèle en M , cette droite est également la bissectrice intérieure de l'angle HMF . \square

3.9. Tangentes du point de vue foyer/directrice — Soit \mathcal{C} une conique de foyer F , de directrice D et d'excentricité e . On sait que \mathcal{C} possède une tangente en tout point M , que l'on note T_M (justification : équation réduite ou paramétrage, cf. 3.7).

Cette droite a une caractérisation géométrique très simple permettant de la construire à partir de F et D .

Théorème 8 — *Soit M un point de \mathcal{C} .*

- (i) *Si M appartient à l'axe focal, alors T_M est la parallèle à D passant par M .*
- (ii) *Si M n'appartient pas à l'axe focal, alors la perpendiculaire à (FM) passant par F intersecte la directrice D en un point P et $T_M = (PF)$.*

Démonstration. On se place dans le repère orthonormé $\mathcal{R}_0 = (K; \vec{i}, \vec{j})$ du début de 2.2 : K est le point d'intersection de l'axe focal Δ avec la directrice et $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{KF}}{KF}$. On note $d = d(F, D)$ l'abscisse de F dans \mathcal{R}_0 .

Dans ce repère, la conique \mathcal{C} est décrite par l'équation cartésienne $(1 - e^2)x^2 - 2dx + y^2 + d^2 = 0$. Étant donné $M(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$, la tangente T_M est la droite d'équation cartésienne

$$0 = [(1 - e)^2 x_0 - d](x - x_0) + y_0(y - y_0) = [(1 - e)^2 x_0 - d]x + y_0 y - d(d - x_0).$$

Cette droite est verticale si et seulement si $y_0 = 0$, donc si et seulement si M appartient à l'axe focal, ce qui démontre (i).

Si M n'appartient pas à l'axe focal, la tangente T_M intersecte la directrice D en le point P de coordonnées $(0, y_1)$, avec $y_1 = \frac{d}{y_0}(d - x_0)$. Il ne reste plus alors qu'à calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{FM} \begin{pmatrix} x_0 - d \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FP} \begin{pmatrix} -d \\ y_1 \end{pmatrix}$:

$$(\overrightarrow{FM} | \overrightarrow{FP}) = -d(d - x_0) + y_0 y_1 = -d(d - x_0) + d(d - x_0) = 0$$

donc $(FP) \perp (FM)$. □

On en déduit une méthode de construction de la tangente T_M en tout point M de \mathcal{C} n'appartenant pas à l'axe focal :

- (i) tracer la droite (FM) ;
- (ii) la perpendiculaire à (FM) coupe D en un point P ;
- (iii) tracer la droite (PM) = T_M .

3.10. Point de vue bifocal — Les ellipses/hyperboles peuvent être décrites géométriquement à partir de leurs deux foyers et de la distance entre les sommets A, A' situés sur l'axe focal.

Théorème 9 — (i) Soit \mathcal{C} une ellipse de foyers F, F'. Notant A et A' les deux sommets de \mathcal{C} sur l'axe focal, $AA' > FF'$ et \mathcal{C} est l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = AA'$.

(ii) Réciproquement, étant donnés deux points distincts F, F' et un nombre réel $a > 0$ tel que $2a > FF'$, l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$ est une ellipse de foyers F, F'.

Démonstration. Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé tel que O soit le milieu de $[FF']$ et $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{FF'}}{FF'}$.

(i) Notant c l'abscisse du point F, on sait que \mathcal{C} est décrite par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ avec $a = \frac{AA'}{2}$ (cf. 2.2). Pour tout point $M(x, y)$ du plan,

$$MF + MF' = AA' \iff (MF + MF')^2 = AA'^2 \iff MF^2 + MF'^2 - AA'^2 = -2MF \cdot MF',$$

$$MF^2 + MF'^2 - AA'^2 = (x - c)^2 + (x + c)^2 + 2y^2 - 4a^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2) - 4a^2$$

et

$$MF \cdot MF' = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2}.$$

En posant $\Phi = x^2 + y^2 + c^2$, nous en déduisons

$$MF + MF' = AA' \iff \Phi - 2a^2 = -\sqrt{\Phi^2 - 4c^2 x^2} \iff \begin{cases} \Phi - 2a^2 \leq 0 \\ (\Phi - 2a^2)^2 = \Phi^2 - 4c^2 x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \Phi - 2a^2 \leq 0 \\ a^2 \Phi - c^2 x^2 - a^4 = 0. \end{cases}$$

Comme $a^2 \Phi - c^2 x^2 - a^4 = (a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 - a^2(a^2 - c^2)$, nous obtenons finalement

$$MF + MF' = AA' \iff \begin{cases} \Phi \leq 2a^2 & (1) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 = 0 & (2). \end{cases}$$

La condition (2) implique $x^2 \leq a^2$ et $y^2 \leq a^2 - c^2$, donc $\Phi = x^2 + y^2 + c^2 \leq a^2 + (a^2 - c^2) + c^2 = 2a^2$. La condition (1) est ainsi une conséquence de (2) et nous pouvons conclure :

$$MF + MF' = AA' \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 = 0 \iff M \in \mathcal{C}.$$

(ii) Soit $M(x, y)$ un point du plan. Vu les calculs que l'on vient d'effectuer,

$$MF + MF' = 2a \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + c^2 \leq 2a^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 \end{cases} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 = 0.$$

Nous avons $a^2 - c^2 > 0$ par hypothèse. Par application du théorème 3, l'équation cartésienne obtenue décrit une ellipse dans le repère \mathcal{R} dont les foyers sont les points F et F' . \square

Remarque — La démonstration de ce théorème demande un peu de soin :

- il faut bien prendre garde au signe de $\Phi - 2a^2$, même si la condition obtenue s'avère *in fine* automatiquement vérifiée ;
- pour l'assertion réciproque (ii), noter que l'ellipse n'existe *a priori* pas et qu'il faut donc établir son existence en recourant au théorème 3.

Il y a un énoncé équivalent pour les hyperboles.

Théorème 9bis — (i) Soit \mathcal{C} une hyperbole de foyers F, F' . Notant A et A' les deux sommets de \mathcal{C} sur l'axe focal, $AA' < FF'$ et \mathcal{C} est l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = AA'$.

(ii) Réciproquement, étant donnés deux points distincts F, F' et un nombre réel $a > 0$ tel que $2a < FF'$, l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$ est une ellipse de foyers F, F' .

Démonstration. C'est exactement la même que celle du théorème 9, à ceci près que l'on obtient $\Phi - 2a^2 = \sqrt{\Phi - 4c^2x^2}$ et donc $\Phi - 2a^2 \geq 0$. \square

Remarque — Avec les notations du théorème, la condition $MF - MF' = 2a$ décrit la branche de l'hyperbole \mathcal{C} située dans le demi-plan ouvert $\{M \in \Pi \mid MF' < MF\}$.

La description bifocale d'une ellipse/hyperbole \mathcal{C} permet d'en donner une construction géométrique simple pouvant se programmer sur une calculatrice graphique.

Cas d'une ellipse. La condition $FF' < 2a$ signifie que le point F' est intérieur au cercle $C(F, 2a)$, et les points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$ sont précisément les centres des cercles passant par F' et tangents à $C(F, 2a)$. Pour tracer cette ellipse, il suffit de considérer un point variable $P \in C(F, 2a)$ et de construire le point d'intersection de (FP) avec la médiatrice du segment $[PF']$.

Cas d'une hyperbole. La condition $FF' > 2a$ signifie que le point F' est extérieur au cercle $C(F, 2a)$, et les points M du plan tels que $MF - MF' = 2a$ sont précisément les centres des cercles passant par F' et tangents à $C(F, 2a)$. Pour tracer cette branche d'hyperbole, il suffit de considérer un point variable $P \in C(F, 2a)$ et de construire le point d'intersection de la demi-droite $[FP)$ avec la médiatrice du segment $[PF']$ lorsque cela est possible.

3.11. Tangentes du point de vue bifocal — Les tangentes à une ellipse/hyperbole \mathcal{C} ont une propriété angulaire remarquable permettant de les construire à partir des foyers de \mathcal{C} . On peut en donner deux démonstrations : l'une reposant sur la description bifocale, l'autre utilisant la définition en termes de foyer et directrice et s'appuyant sur le théorème 8.

Théorème 10 — Soit \mathcal{C} une ellipse/hyperbole de foyers F, F' . Pour tout point M de \mathcal{C} , la tangente et la normale à \mathcal{C} au point M sont les bissectrices des droites (MF) et (MF') . Plus précisément :

- (i) si \mathcal{C} est une ellipse, la tangente au point M est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$;
- (ii) si \mathcal{C} est une hyperbole, la tangente au point M est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Première démonstration. Une première méthode consiste à considérer un paramétrage régulier de \mathcal{C} et à dériver la relation métrique bifocale. Écrivons-le dans le cas d'une hyperbole définie par $|FM - F'M| = 2a$.

Soit donc $(I \rightarrow \mathcal{C}, t \mapsto M(t))$ un paramétrage régulier d'une branche de \mathcal{C} , disons celle définie par la condition $FM - F'M = 2a$. En réécrivant cette condition sous la forme

$$\forall t \in I, \left(\overrightarrow{FM(t)} \mid \overrightarrow{FM(t)} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\overrightarrow{F'M(t)} \mid \overrightarrow{F'M(t)} \right)^{\frac{1}{2}} = 2a$$

et en dérivant, on obtient

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{FM(t)}\|} \left(\overrightarrow{FM(t)} \mid \frac{dM(t)}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\|\overrightarrow{F'M(t)}\|} \left(\overrightarrow{F'M(t)} \mid \frac{dM(t)}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

soit encore

$$\left(\frac{\overrightarrow{FM(t)}}{\|\overrightarrow{FM(t)}\|} - \frac{\overrightarrow{F'M(t)}}{\|\overrightarrow{F'M(t)}\|} \mid \frac{dM(t)}{dt} \right) = 0.$$

Le vecteur $\frac{\overrightarrow{FM(t)}}{\|\overrightarrow{FM(t)}\|} - \frac{\overrightarrow{F'M(t)}}{\|\overrightarrow{F'M(t)}\|}$ dirige la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$ donc cette identité signifie que le vecteur tangent $\frac{dM(t)}{dt}$ dirige la bissectrice *intérieure* de cet angle.

Seconde démonstration. Une seconde méthode consiste à utiliser le théorème 8.

Si $M \in \{A, A'\}$ est l'un des sommets de \mathcal{C} situé sur l'axe focal, alors T_M est perpendiculaire à (FF') et il s'agit donc d'une bissectrice de l'angle plat $\widehat{FMF'}$. Cette bissectrice est *intérieure* si \mathcal{C} est une hyperbole, car M appartient alors à l'intérieur du segment $[FF']$; elle est *extérieure* si \mathcal{C} est une ellipse, car M appartient alors à l'extérieur du segment $[FF']$ (cf. figure en 2.1).

Nous supposons maintenant que M n'appartient pas à l'axe focal, auquel cas la droite T_M intersecte les directrices D et D' de \mathcal{C} , respectivement associées aux foyers F et F' , en des points P et P' tels que $(PF) \perp (MF)$ et $(P'F') \perp (MF')$ (Théorème 9). Notant e l'excentricité de \mathcal{C} et H, H' les projetés orthogonaux de M sur D et D' , on en déduit les identités

$$\cos(\widehat{PMF}) = \frac{FM}{PM} = e \frac{MH}{MP} \quad \text{et} \quad \cos(\widehat{P'MF'}) = \frac{F'M}{P'M} = e \frac{MH'}{P'M},$$

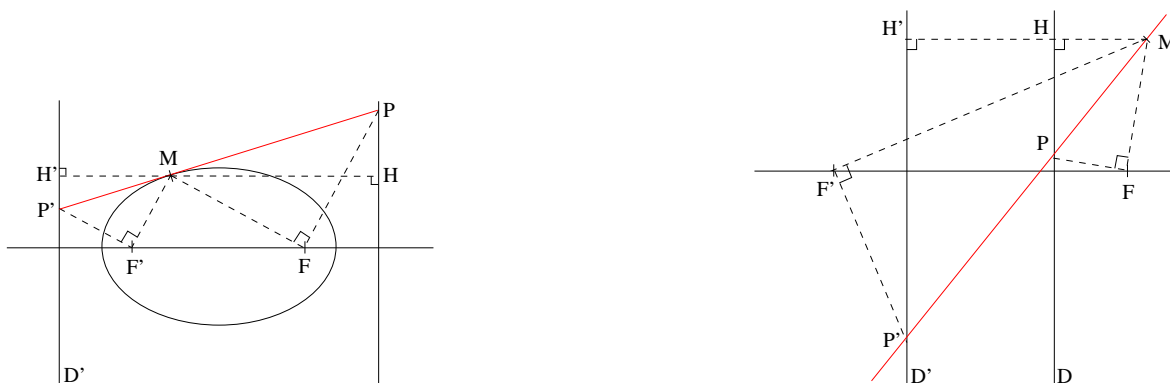
puis

$$\cos(\widehat{PMF}) = \cos(\widehat{P'MF'})$$

par application du théorème de Thalès puisque les droites D et D' sont parallèles.

L'égalité des cosinus est équivalente à l'égalité des angles géométriques : $\widehat{PMF} = \widehat{P'MF'}$, donc la droite (PP') est une bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$. Pour conclure, il reste à faire intervenir la position relative des foyers et des directrices :

- (i) si \mathcal{C} est une ellipse, alors F et F' sont du même côté de (PP') et cette droite est donc la bissectrice *extérieure* de l'angle $\widehat{FMF'}$;
- (ii) si \mathcal{C} est une hyperbole, alors F et F' sont de part et d'autre de (PP') et cette droite est donc la bissectrice *intérieure* de l'angle $\widehat{FMF'}$.



□

IV. Liens avec d'autres leçons

Certains compléments proposés ci-dessus peuvent être utilisés, en totalité ou en partie, pour illustrer d'autres leçons. *Bien entendu, si vous choisissez d'en parler, vous devez être en mesure de répondre à des questions sur les coniques.*

Théorème de Thalès (24) — Partant d'une ellipse décrite par une équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sa construction à partir du cercle $C(O, a)$ est une application du théorème de Thalès (cf. 3.4).

Produit scalaire dans le plan (29) — L'expression du produit scalaire dans une base orthonormée fournit la formule classique exprimant la distance de deux points. On peut l'illustrer en démontrant que, sur l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, les deux sommets $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$ sont caractérisés par le fait d'être les points les plus éloignés l'un de l'autre (cf. 3.2, Lemme 4).

Le cercle (30) — On peut proposer de déterminer les points d'intersection de la conique $\{M \in \Pi \mid MF = e \cdot d(M, D)\}$ avec les droites parallèles à D . Ce problème se ramène à l'étude de la position relative d'un cercle et d'une droite (cf. 3.1).

Réflexions du plan échangeant deux droites sécantes données (38) — Les tangentes à une parabole donnent des exemples naturels de bissectrices (cf. 3.7).

Groupe des isométries du plan (42) — Une fois que l'on dispose de la caractérisation métrique des deux sommets d'une ellipse \mathcal{C} situés sur l'axe focal (cf. 3.2, Lemme 4), la détermination de toutes les isométries préservant \mathcal{C} peut illustrer la classification des isométries planes à partir de leurs points invariants (cf. 3.2, Proposition 5).

Courbes définies par des équations paramétriques dans le plan (47) — Les coniques fournissent évidemment des exemples de courbes planes pouvant être décrites par des équations paramétriques (cf. 3.6). En admettant la description bifocale, ce point de vue permet d'établir une propriété remarquables des tangentes (cf. 3.11).

Limites à l'infini d'une fonction à valeurs réelles. Branches infinies (59) — On peut illustrer la recherche des branches infinies du graphe d'une fonction en parlant des hyperboles. Si \mathcal{C} est l'hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormée $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ ($a, b > 0$), chacune de ses branches est le graphe d'une fonction $(f_{\pm} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \pm a \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}})$. La recherche des asymptotes de \mathcal{C} peut se faire à l'aide de f_{\pm} .

En écrivant

$$a \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} = \frac{a}{b} |y| \left(1 + \frac{b^2}{y^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{b} |y| \left(1 + \frac{b^2}{2y^2} + o\left(\frac{1}{y^2}\right) \right) = \frac{a}{b} |y| + o\left(\frac{1}{y}\right)$$

lorsque $|y|$ tend vers $+\infty$, on voit que la droites d'équations $x = \pm \frac{b}{a}y$ sont asymptotes aux graphes des fonctions f_{\pm} , donc à l'hyperbole \mathcal{C} .

Ceci peut également s'écrire dans développement limité : pour tout $y > 0$,

$$\frac{f_+(y)}{y} = \frac{a}{y} \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} = \frac{a}{b} \sqrt{1 + \frac{b^2}{y^2}} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} \frac{a}{b}$$

et

$$\frac{f_+(y)}{y} - \frac{a}{b} y = \frac{a}{b} \left(\sqrt{b^2 + y^2} - \sqrt{y^2} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + y^2} + \sqrt{y^2}} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0,$$

donc la droite d'équation $x = \frac{a}{b}y$ est asymptote au graphe de la fonction f_+ en $+\infty$.

Développements limités (68) — Telle qu'on vient de l'exposer, la détermination des asymptotes d'une hyperbole illustre l'utilisation des développements limités, en l'occurrence : $(1+h)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}h + o(h)$ au voisinage de 0 (DL d'une fonction réciproque ou utilisation du logarithme).