Université Claude Bernard Lyon 1
CAPES 2009 – 2010
Devoir à la Maison

1er novembre 2009

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des suites complexes $(u_k)_{k\geq 0}$, et on s'intéresse aux suites récurrentes linéaires d'ordre n, c'est-à-dire aux suites dont les éléments $u_k, k \geq n$ vérifient une relation du type :

$$u_k = c_1 u_{k-n} + c_2 u_{k-n+1} + ... + c_n u_{k-1}. \tag{1}$$

Plus précisément, étant donnés n nombres réels $c_1, c_2, ..., c_n$, on note $R_n(c_1, c_2, ..., c_n)$ l'ensemble des suites $(u_k)_{k\geq n}$ dont les éléments $u_k, k \geq n$, vérifient l'égalité 1. Une telle suite est donc parfaitement déterminée par la donnée de ses n premiers termes

$$(u_0, u_1, ..., u_{n-1}).$$

On définit comme suit l'application

$$\phi : \mathbb{R}^n \to R_n(c_1, c_2, ..., c_n).$$

Pour tout $(u_0, u_1, ...u_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\phi(u_0, u_1, ...u_{n-1}) = u,$$

où $u = (u_k)_{k\geq 0}$ est l'élément de $R_n(c_1, c_2, ..., c_n)$ déterminé par ses n premiers termes

$$u_0, u_1, ..., u_{n-1}.$$

1. (a) Montrer que $R_n(c_1, c_2, ..., c_n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$ de dimension n.

   (b) Vérifier que l'équation 1 peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} u_{k-n+1} \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{k-n} \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix}$$

   où A est une matrice carrée que l'on précisera.

(c) Exprimer $\begin{pmatrix} u_{k-n+1} \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$ en fonction de A et $\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$.

(d) Montrer que le polynôme caractéristique P_A de A s'écrit :

$$P_A(\lambda) = c_1 + c_2\lambda + ... + c_n\lambda^{n-1} - \lambda^n. \tag{2}$$

(e) On suppose dans cette question que A est diagonalisable. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ses valeurs propres, et P une matrice de passage. Exprimer $\begin{pmatrix} u_{k-n+1} \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$ en fonction de P, P^{-1} et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$.

2. On suppose dans cette partie que la matrice A admet n valeurs propres distinctes $r_1, ..., r_n$.

   (a) Montrer qu'on peut diagonaliser A en utilisant une matrice de passage P ne comportant que des 1 sur la première ligne.

   (b) Soient $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ les vecteurs colonnes de P. Déterminer l'image de chaque v_i par ϕ et en déduire une base de $R_n(c_1, \cdots, c_n)$.

   (c) Exprimer en fonction de $(u_0, u_1, ..., u_{n-1})$ et de la matrice inverse de P, les coefficients de la décomposition de $u = \phi(u_0, u_1, ..., u_{n-1})$ sur la base de $R_n(c_1, \cdots, c_n)$ trouvée à la question précédente.

   (d) i. Indiquer à quelle condition sur les coefficients c_i la matrice A est inversible.

   ii. Lorsque cette condition est remplie, calculer l'inverse A^{-1} de A.

   (e) Le but de cette question est de calculer l'inverse de la matrice P par une méthode indirecte.

   i. Vérifier que la résolution de l'équation ${}^tPX = Y$ revient à la détermination d'un polynôme $Q(Z)$ de degré $(n-1)$ tel que $Q(r_i) = y_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

   ii. On désigne par $H(Z)$ le polynôme $\prod_{1\leq i\leq n}(Z - r_i)$ et $F(Z)$ la fraction rationnelle $\frac{Q(Z)}{H(Z)}$.
   - Décomposer $F(Z)$ en éléments simples.
   - En déduire une expression de $Q(Z)$ de la forme

$$\sum_{1\leq i\leq n} y_i Q_i(Z).$$