DOSSIER Geo 6	**Thème : Géométrie** **Outils en géométrie plane : calcul vectoriel**

L'exercice

On considère un triangle ABC dans le plan et on désigne par (Γ) son cercle circonscrit, O son centre et r son rayon.

Partie A : la droite d'Euler

1. Soit G le point défini par : $3\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
   a) Montrer que G appartient à la droite (AA'), où A' est le milieu de $[BC]$.
   b) En déduire que G est le centre gravité du triangle ABC.
2. Soit H le point défini par : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
   a) Montrer que : $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
   b) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC, puis que les points O, G et H sont alignés.

Partie B : le cercle d'Euler

On note A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, puis H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C, et enfin P, Q et R les milieux respectifs de $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$. On note ω le milieu de $[OH]$.
Il s'agit d'établir que ces neuf points sont situés sur un même cercle appelé cercle d'Euler du triangle ABC ou cercle des neuf points.

1. Justifier l'égalité : $\overrightarrow{\omega P} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.
2. Montrer que : $2\,\overrightarrow{O\omega} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et en déduire que $\overrightarrow{\omega A'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.
3. a) En déduire que P et A' appartiennent à un même cercle (C) de centre ω ; donner son rayon.
   b) Montrer que H_A appartient aussi à (C).
4. Conclure.

Des réponses d'élèves dans la partie A

La réponse d'un élève à la question 1.a.

J'applique la relation de Chasles : $3\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

Je simplifie : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Et quand je construis $AB + \overrightarrow{AC}$ *avec le parallélogramme, la diagonale est bien (AA'), ce qui fait que G est bien sur la droite (AA').*

La réponse d'un élève à la question 2.a.

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}).(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC})$

$= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC}$

$= - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC}$

Les produits scalaires $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB}$ *et* $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC}$ *sont égaux parce que OB = OC (car B et C sont sur le cercle circonscrit), donc* $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$.

On peut faire le même calcul pour $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA}$ *et* $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Le travail à exposer devant le jury

1. Présenter une animation à l'aide d'un logiciel de géométrie.
2. Analyser la production de chaque élève en mettant en évidence ses connaissances et savoir-faire dans le domaine du calcul vectoriel.
3. Présenter une solution des questions B. 2 et B.3. telle que le candidat la présenterait devant une classe.
4. Proposer deux autres exercices se rapportant au thème **« Outils en géométrie plane : calcul vectoriel ».**