DOSSIER Géométrie 7	**Thème** Outils en géométrie plane : les nombres complexes

L'exercice proposé au candidat

On se donne trois points non alignés A, B, C du plan, et le triangle T qu'ils forment. On se propose ici de démontrer uniquement à l'aide des nombres complexes la propriété géométrique classique suivante :

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H, appelé orthocentre de T.

1. Montrer qu'on peut munir le plan d'un repère orthonormé tel que les affixes respectives a, b, c des points A, B, C soient de module 1. On suppose qu'il en est ainsi dans la suite de l'exercice.
2. On définit le point H d'affixe $h = a + b + c$.
   (a) Montrer que les hauteurs du triangle T se coupent au point H.
   (b) Montrer que H est aligné avec le centre de gravité de T et le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Éléments de réponse d'élève à la question 2a.

On cherche d'abord si la droite (AH) est une hauteur du triangle. On doit avoir $(AH) \perp (BC)$. On calcule le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (h–a)(c–b) = (b + c)(c–b) = c^2–b^2 = |c|^2 - |b|^2 = 1–1 = 0.$$

Donc (AH) est perpendiculaire à (BC), c'est la hauteur passant par A.
Aussi : $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = (h–b)(c–a) = (a + c)(c–a) = c^2–a^2 = 0$.
Et aussi : $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = (h–c)(b–a) = (a + b)(b–a) = b^2–a^2 = 0$. On a bien $(BH) \perp (AC)$ et $(CH) \perp (AB)$, ce sont des hauteurs, ce qui fait que H est l'orthocentre du triangle.

Le travail à exposer devant le jury

1. Illustrer l'exercice à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.
2. Analyser la production de l'élève en mettant en évidence les compétences acquises et l'origine de ses éventuelles erreurs.
3. Proposer une correction de la question 2a telle que vous l'exposeriez devant une classe de Terminale.
4. Proposer deux exercices sur le thème «outils en géométrie plane : les nombres complexes».