

Étude de $z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$ via l'inversion (leçon 19)

Présentation — La leçon 19, consacrée à l'étude de l'homographie complexe $f : z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$ et des lignes de niveau de son module et de son argument, peut se construire entièrement à partir de deux observations simples :

- (i) f est une bijection composée de deux similitudes et d'une *inversion* (cf. partie 1) ;
- (ii) les lignes de niveau de $|f|$ et $\arg(f)$ ne sont rien d'autre que les images par la bijection réciproque f^{-1} des cercles $C(0, r)$ et des demi-droites issues de l'origine ; comme l'effet d'une similitude sur un cercle ou une demi-droite est parfaitement compris, il suffit de connaître celui de l'inversion pour être en mesure de décrire les lignes de niveau de $|f|$ et $\arg(f)$ (cf. partie 3).

L'étude de l'inversion (cf. partie 2) et son application aux lignes de niveau (cf. partie 3) ne sont pas difficile et l'on retrouve aisément les énoncés sur une figure. Ce point de vue a au moins deux conséquences intéressantes :

- (i) il évite le recours au théorème de l'arc capable, qui peut sembler parachuté en fin d'exposé ;
- (ii) il permet d'exploiter à fond la décomposition initiale de f en composée d'applications élémentaires, tout en justifiant l'introduction de l'inversion.

Adopter ce plan suppose d'être à l'aise avec les nombres complexes. Dans ce cas, il semble raisonnable de présenter la partie 2 sur un (ou deux) transparent(s) avec une démonstration courte (par exemple, une partie du théorème 1 ou le théorème 2) et de démontrer le théorème 5 ou le théorème 6. La représentation graphique de f que l'on obtient en fin de compte (partie 4, point 1) mérite d'être présentée en conclusion.

Remarque — L'inversion fournit une belle illustration des leçons consacrées aux projections orthogonales dans le plan (25) et aux relations métriques dans un triangle rectangle (32). Voir la fin de la partie 4.

Prérequis et cadre — Géométrie euclidienne plane du secondaire / Propriétés élémentaires des nombres complexes et interprétation géométrique / Expression complexe des similitudes planes.

On désigne par P un plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct d'origine O . Les points et les vecteurs sont repérés par leurs affixes. On confond les angles orientés et leurs mesures.

Rappels — 1. L'équation $|z|^2 - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} + c = 0$ avec $\omega \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{R}$ décrit l'ensemble vide, le singleton $\{\omega\}$ ou un cercle de centre ω selon que l'on a $|\omega|^2 < c$, $|\omega|^2 = c$ ou $|\omega|^2 > c$. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que le membre de gauche est le développement de $|z - \omega|^2 - (|\omega|^2 - c)$.

2. Le produit scalaire $xx' + yy'$ de deux vecteurs d'affixes $u = x + iy$ et $v = x' + iy'$ est la partie réelle $\frac{1}{2}(u\bar{v} + \bar{u}v)$ de $u\bar{v}$. En particulier, $n(\bar{z} - \bar{a}) + \bar{n}(z - a) = 0$ est l'écriture complexe d'une équation de la droite passant par le point $A(a)$ et de vecteur normal d'affixe n .

1. Interprétation géométrique

Pour tout $z \in \mathbb{C} - \{b\}$,

$$f(z) = \frac{(z-b) + b - a}{z-b} = 1 + (b-a) \frac{1}{z-b} = 1 + (b-a) \cdot \frac{\bar{z} - \bar{b}}{|z-b|^2} = 1 + (b-a) \cdot \frac{\bar{z} - \bar{b}}{|\bar{z} - \bar{b}|^2},$$

donc f est la composée $\sigma_2 \circ \eta \circ \sigma_1$ des trois applications

$$\mathbb{C} - \{b\} \xrightarrow{\sigma_1} \mathbb{C} - \{0\} \xrightarrow{\eta} \mathbb{C} - \{0\} \xrightarrow{\sigma_2} \mathbb{C} - \{1\}$$

définies par

$$\sigma_1(z) = \bar{z} - \bar{b}, \quad \sigma_2(z) = (b-a) \cdot z + 1 \quad \text{et} \quad \eta(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}} \quad (z \neq 0).$$

Les applications σ_1 et σ_2 sont bien connues :

- (i) σ_1 est une similitude indirecte, composée $\tau \circ \rho$ de la réflexion ρ par rapport à l'axe des abscisses par la translation τ de vecteur $-\bar{b}$;
- (ii) σ_2 est une similitude directe, composée $\tau' \circ \sigma$ de la similitude directe σ de centre 0, de rapport $|b-a|$ et d'angle de mesure $\arg(b-a)$ par la translation τ' de vecteur 1.

Conséquences — 1. Les trois applications σ_1, σ_2 et η sont bijectives et

$$\sigma_1^{-1}(z) = \bar{z} + b, \quad \sigma_2^{-1}(z) = \frac{z-1}{b-a}, \quad \eta^{-1} = \eta.$$

Leur composée f est donc une *bijection*, et $f^{-1} = (\sigma_2 \circ \eta \circ \sigma_1)^{-1} = \sigma_1^{-1} \circ \eta^{-1} \circ \sigma_2^{-1}$ est l'application

$$\mathbb{C} - \{1\} \rightarrow \mathbb{C} - \{b\}, \quad z \mapsto b + \frac{1}{\frac{\bar{z}-1}{b-a}} = \frac{bz-a}{z-1}.$$

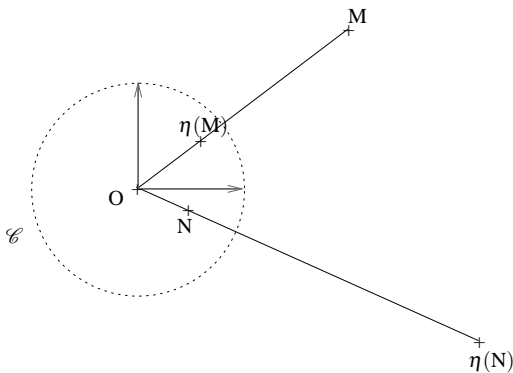
2. Pour comprendre f , il reste à étudier la bijection

$$\eta : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}, \quad z \mapsto \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2},$$

appelée *inversion*.

2. L'inversion

2.1 Description géométrique



L'application η est l'expression complexe de la bijection, également notée η :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} - \{O\} &\longrightarrow \mathbb{P} - \{O\} \\ M &\longmapsto \eta(M) = O + \frac{1}{OM^2} \cdot \overrightarrow{OM}. \end{aligned}$$

L'image du point de coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est le point de coordonnées $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

Le point $\eta(M)$ appartient à la demi-droite $[OM)$ et $O\eta(M) = OM^{-1}$. On en déduit que l'inversion fixe chaque point du cercle unité \mathcal{C} et applique l'intérieur (resp. l'extérieur) de \mathcal{C} sur son extérieur (resp. intérieur).

Remarques — 1. On prendra bien garde que l'inversion n'est *pas* une application affine !

2. Afin de ne pas alourdir les énoncés, on s'autorisera à parler de droite ou de cercle lorsqu'il s'agit en fait d'une droite ou d'un cercle privé du point O.

2.2. Image d'un cercle

Théorème 1 — L'inversion transforme un cercle en un cercle ou une droite.

Plus précisément, soit $C = C(\Omega, r)$ un cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$.

(i) Si $\Omega = O$, alors $\eta(C) = C(O, r^{-1})$.

(ii) Si C passe par O — c'est-à-dire si $O\Omega = r$ —, alors $\eta(C)$ est la droite perpendiculaire à $(O\Omega)$ passant par $\eta(O')$, image du point O' de C diamétralement opposé à O .

(iii) Si $\Omega \neq O$ et $O\Omega \neq r$, alors $\eta(C)$ est le cercle de diamètre $[\eta(A)\eta(B)]$, où A et B sont les points d'intersection de C avec la droite $(O\Omega)$.

Démonstration. Le cas (i) est immédiat, et l'on suppose dans la suite que le point Ω est distinct de O .

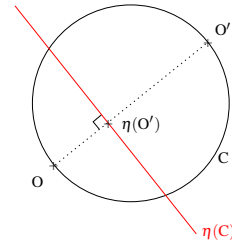
Notons ω l'affixe du point Ω . Pour tout point M d'affixe $z \neq 0$,

$$M \in \eta(C) \iff \eta^{-1}(M) = \eta(M) \in C \iff \left| \frac{1}{\bar{z}} - \omega \right| = r \iff |1 - \omega\bar{z}| = r|z|.$$

En élevant au carré et en développant, cette condition devient : $(|\omega|^2 - r^2)|z|^2 - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} + 1 = 0$.

(ii) Si $|\omega| = r$, c'est-à-dire si C passe par O , l'ensemble $\eta(C)$ est décrit par l'équation $\bar{\omega}z + \omega\bar{z} - 1 = 0$.

Il s'agit de la droite passant par le point d'affixe $\frac{\omega}{2|\omega|^2}$ (l'image du point O' de C diamétralement opposé à O) et perpendiculaire à la droite $(O\Omega)$ (cf. rappels).

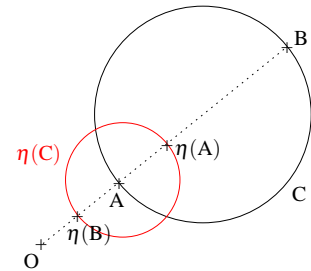


(iii) Si $|\omega| \neq r$, alors $\eta(C)$ est décrit par l'équation

$$|z|^2 - \frac{\bar{\omega}}{|\omega|^2 - r^2}z - \frac{\omega}{|\omega|^2 - r^2}\bar{z} + \frac{1}{|\omega|^2 - r^2} = 0$$

et il s'agit donc d'un cercle dont le centre Ω' , d'affixe $\omega' = (|\omega|^2 - r^2)^{-1}\omega \in \mathbb{R}^\times \omega$, est aligné avec O et Ω (cf. rappels).

Soit A et B les deux points d'intersection du cercle C avec la droite $(O\Omega)$. Les points $\eta(A)$ et $\eta(B)$ appartiennent au cercle $\eta(C)$ et sont alignés avec Ω' , donc $[\eta(A), \eta(B)]$ est un diamètre de $\eta(C)$.



□

Remarque — Dans le cas (iii), les affixes des points A et B sont de la forme $\lambda\omega$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ (alignement avec O et Ω) et $|\lambda\omega - \omega| = r$ (appartenance à C), donc $\lambda = 1 \pm \frac{r}{|\omega|}$. Les affixes des points $\eta(A)$ et $\eta(B)$ s'en déduisent immédiatement :

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\omega}{|\omega|^2} = \frac{1}{|\omega|^2 \pm r^2} \cdot \frac{\omega}{|\omega|}.$$

2.3. Image d'une droite

Théorème 2 — L'inversion transforme une droite D en une droite ou un cercle.

Plus précisément :

(i) si D passe par l'origine, alors $\eta(D) = D$;

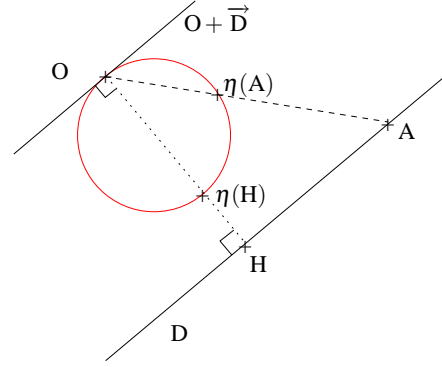
(ii) si D ne passe pas par l'origine, alors $\eta(D)$ est le cercle de diamètre $[O\eta(H)]$, où H est le projeté orthogonal de O sur D .

Étant donné un point A sur D , on peut également décrire $\eta(D)$ comme étant le cercle passant par $\eta(A)$ et tangent en O à la droite $O + \vec{D}$.

Démonstration — (i) Ce cas est immédiat : la définition implique $\eta(D) \subset D$, d'où l'on déduit $D = \eta^2(D) \subset \eta(D)$ puisque η^2 est l'identité ; on a donc $\eta(D) = D$.

(ii) Soit C le cercle de diamètre $[O\eta(H)]$. D'après le point (ii) du théorème 1, $\eta(C)$ est la droite perpendiculaire à (OH) passant par le point $\eta(\eta(H)) = H$. On obtient ainsi $\eta(C) = D$, d'où $\eta(D) = \eta^2(C) = C$.

Le cercle $C = \eta(D)$ est complètement caractérisé par la donnée du point $\eta(A)$ et de sa tangente au point O . Cette droite est la perpendiculaire à (OH) passant par O , donc la parallèle à D passant par O .



Corollaire 3 — *L'ensemble des droites et des cercles du plan est globalement invariant par inversion et par l'application f .*

Démonstration. Cela découle directement des théorèmes 1 et 2 dans le cas de l'inversion. Pour f , il suffit d'observer que les similitudes transforment une droite (resp. un cercle) en une droite (resp. un cercle). \square

2.4. Image d'une demi-droite

Nous allons préciser le théorème 2 en décrivant l'image d'une *demi-droite*.

Théorème 4 — *Soit $\Delta = A + \mathbb{R}_{>0}\vec{\delta}$ une demi-droite ouverte issue d'un point A et dirigée par un vecteur $\vec{\delta}$.*

1. Si $A = O$, alors $\eta(\Delta) = \Delta$.

2. Supposons $A \neq O$ et posons $\alpha = (\widehat{OA, \vec{\delta}})$. Il y a trois cas de figure, les deux premiers se produisant lorsque Δ est contenue dans la droite (OA) .

(i) Si $\alpha = 0$, alors $\eta(\Delta) =]O, \eta(A)[$.

(i') Si $\alpha = \pi$, alors $\eta(\Delta) = (OA) - [O\eta(A)]$.

(ii) Si $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$, alors $\eta(\Delta)$ est l'arc de cercle d'extrémités O et $\eta(A)$, de demi-tangente $O + \vec{\Delta}$ en O .

Démonstration. 1. C'est immédiat (cf. Théorème 1, (i)).

2. (i) Dans ce cas, Δ est l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{OM} = \lambda \cdot \vec{OA}$ avec $\lambda > 1$. Cette condition est équivalente à $\frac{\vec{OM}}{OM^2} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\vec{OA}}{OA^2}$. Comme $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$ est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]0, 1[$, on en déduit :

$$\eta(D) =]O, \eta(A)[.$$

(i') Soit $\Delta' = A + \mathbb{R}_{\leq 0}\vec{\delta}$ la demi-droite fermée complémentaire de Δ dans (OA) . L'application η étant bijective,

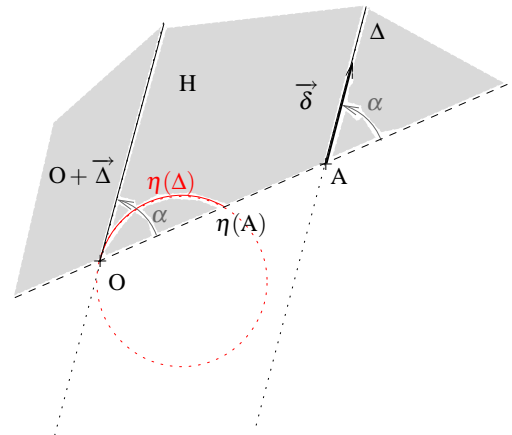
$$\eta(\Delta) = \eta(OA) - \eta(\Delta') = (OA) - (\{O\} \cup]O, \eta(A)]) = (OA) - [O\eta(A)].$$

(ii) Si $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$, alors Δ est l'intersection de la droite $D = (A, \vec{\delta})$ avec l'un des deux demi-plans ouverts de frontière (OA) . Notons H ce demi-plan.

Pour tout point $M \in H$, la demi-droite ouverte $\mathbb{R}_{>0} \cdot \vec{OM}$ est contenue dans H par convexité, donc $\eta(M) \in H$. On a ainsi $\eta(H) \subset H$, d'où $H = \eta^2(H) \subset \eta(H)$ et, finalement, $\eta(H) = H$. En utilisant encore la bijectivité de η , on en déduit :

$$\eta(\Delta) = \eta(H \cap D) = \eta(H) \cap \eta(D) = H \cap \eta(D).$$

D'après le théorème 1, $\eta(\Delta)$ est par conséquent l'arc de cercle ouvert découpé par H sur $\eta(D)$, c'est-à-dire l'arc d'extrémités $\eta(A)$ et O , de demi-tangente $O + \vec{\Delta}$ en O .



3. Lignes de niveau

3.1. Module

Étant donné un nombre réel $r \geq 0$, posons : $\mathcal{M}_r = \{z \in \mathbb{C} - \{b\} \mid |f(z)| = r\}$. Quel que soit $z \in \mathbb{C} - \{b\}$,

$$z \in \mathcal{M}_r \iff f(z) \in C(0, r) \iff z \in f^{-1}(C(0, r)),$$

donc \mathcal{M}_r n'est pas autre chose que l'image du cercle $C(0, r)$ par la bijection f^{-1} . La décomposition de f décrite à la première partie permet d'écrire :

$$\mathcal{M}_r = (\sigma_1^{-1} \circ \eta \circ \sigma_2^{-1})(C(0, r)) = \sigma_1^{-1}(\eta(\sigma_2^{-1}(C(0, r)))).$$

Théorème 5 — (i) $\mathcal{M}_0 = \{a\}$.

(ii) \mathcal{M}_1 est la médiatrice du segment $[a, b]$.

(iii) Si $r > 0$ et $r \neq 1$, alors \mathcal{M}_r est le cercle de diamètre $[c, d]$, où

$$c = \frac{a - rb}{1 - r} = \text{Bar}\{(a, 1), (b, -r)\} \quad \text{et} \quad d = \frac{a + rb}{1 + r} = \text{Bar}\{(a, 1), (b, r)\}.$$

Démonstration. Les cas (i) et (ii) sont immédiats.

(iii) La similitude $\sigma_1^{-1} : z \mapsto \sigma_1^{-1}(z) = (b - a)^{-1}(z - 1)$ transforme $C(0, r)$ en le cercle C_1 de centre $\omega_1 = \sigma_1^{-1}(0) = (a - b)^{-1}$ et de rayon $r_1 = |b - a|^{-1}r$.

Comme $r \neq 1$, $r_1 \neq |\omega_1|$ et donc $C'_1 = \eta(C_1)$ est le cercle de diamètre $[c, d]$, avec

$$c = \frac{\omega_1}{|\omega_1|(|\omega_1|^2 - r_1^2)} = \frac{\bar{a} - \bar{b}}{1 - r} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_1}{|\omega_1|(|\omega_1|^2 + r_1^2)} = \frac{\bar{a} - \bar{b}}{1 + r}$$

(Théorème 3, cas (ii), et Remarque 4).

Finalement, $\mathcal{M}_r = \sigma_2^{-1}(C'_1)$ est le cercle de diamètre : $[\bar{c} + b, \bar{d} + b] = \left[\frac{a - rb}{1 - r}, \frac{a + rb}{1 + r}\right]$. \square

3.2. Argument

Étant donné un nombre réel ϑ (modulo 2π), posons : $\mathcal{A}_\vartheta = \{z \in \mathbb{C} - \{b\} \mid \arg(f(z)) = \vartheta\}$ et soit Δ_ϑ la demi-droite ouverte $\mathbb{R}_{>0} \cdot e^{i\vartheta}$. Quel que soit $z \in \mathbb{C} - \{b\}$,

$$z \in \mathcal{A}_\vartheta \iff f(z) \in \Delta_\vartheta \iff z \in f^{-1}(\Delta_\vartheta),$$

donc \mathcal{A}_ϑ n'est pas autre chose que l'image de la demi-droite Δ_ϑ par la bijection f^{-1} . Par conséquent :

$$\mathcal{A}_\vartheta = (\sigma_1^{-1} \circ \eta \circ \sigma_2^{-1})(\Delta_\vartheta) = \sigma_1^{-1}(\eta(\sigma_2^{-1}(\Delta_\vartheta))).$$

Théorème 6 — (i) $\mathcal{A}_0 = (a, b) - [a, b]$.

(ii) $\mathcal{A}_\pi =]a, b[$.

(iii) Si $\vartheta \neq 0 \pmod{2\pi}$, alors \mathcal{A}_ϑ est l'arc de cercle ouvert d'extrémités a et b , de demi-tangente (en a) la demi-droite $a + \mathbb{R}_{>0} \cdot e^{i\vartheta}(a - b)$.

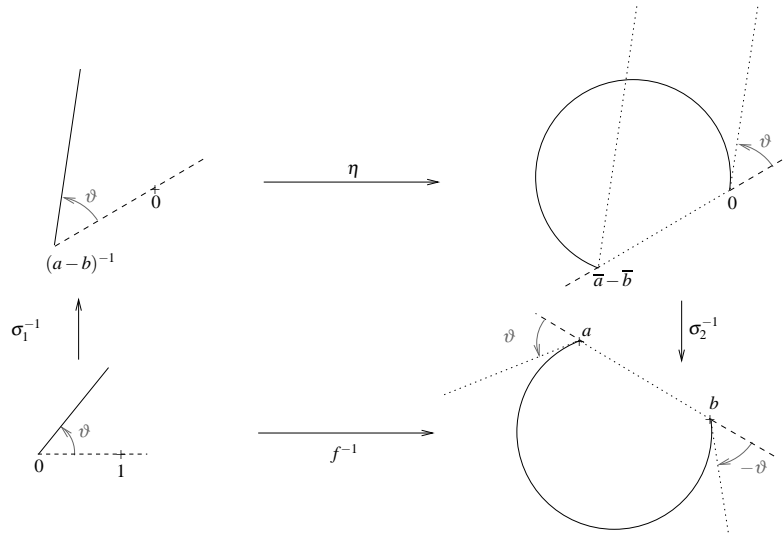
Démonstration. La similitude directe σ_1^{-1} envoie 0 (resp. 1) sur $(a - b)^{-1}$ (resp. 0), donc $\Delta_1 = \sigma_1^{-1}(\Delta_\vartheta)$ est la demi-droite issue de $c = (a - b)^{-1}$ telle que $\widehat{(c0, \Delta_1)} = \vartheta$, c'est-à-dire $\widehat{(0c, \Delta_1)} = \pi + \vartheta$.

(i) Si $\vartheta = 0$, alors $\eta(\Delta_1) = (c, 0) - [c, 0]$ en vertu du théorème 3, puis $\mathcal{A}_0 = \sigma_2^{-1}(\eta(\Delta_1)) = (a, b) - [a, b]$ car $\sigma_2^{-1}(c) = a$ et $\sigma_2^{-1}(0) = b$.

(ii) Si $\vartheta = \pi$, alors $\eta(\Delta_1) =]c, 0[$ et $\mathcal{A}_\pi =]a, b[$.

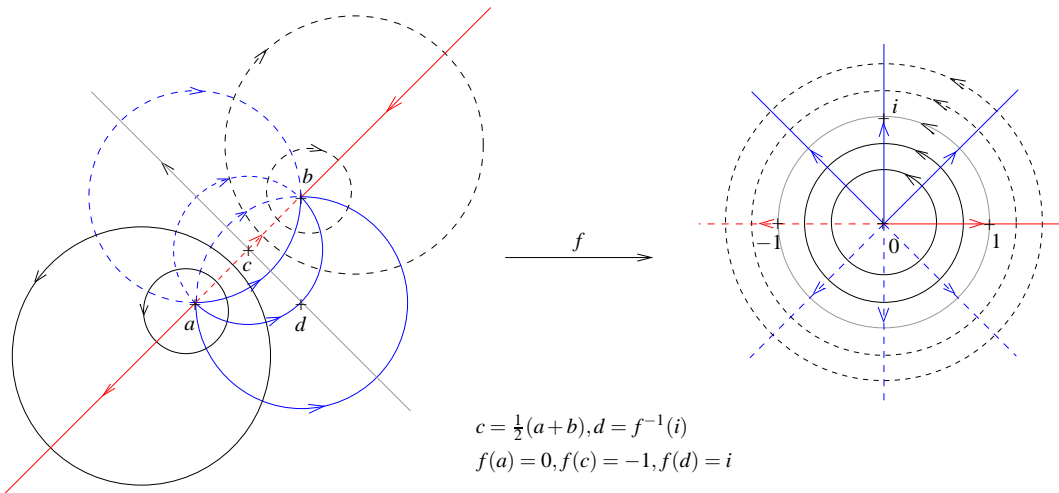
(iii) Si $\vartheta \neq 0 \pmod{\pi}$, alors $\Delta'_1 = \eta(\Delta_1)$ est l'arc de cercle ouvert d'extrémités c et 0, de demi-tangente en 0 faisant un angle de mesure ϑ avec $\overrightarrow{c0}$. Finalement, la similitude σ_2^{-1} étant indirecte, $\mathcal{A}_\vartheta = \sigma_2^{-1}(\Delta'_1)$ est l'arc de cercle ouvert d'extrémités $\sigma_2^{-1}(c) = a$ et $\sigma_2^{-1}(0) = b$, faisant un angle de mesure $-\vartheta$ avec \overrightarrow{ab} . La demi-tangente à cet arc au point a fait un angle de mesure ϑ avec \overrightarrow{ba} (considérer la réflexion par rapport à la médiatrice de $[a, b]$), donc il s'agit de la demi-droite $a + \mathbb{R}_{>0} \cdot e^{i\vartheta}(a - b)$. \square

Remarque — On a intérêt à représenter graphiquement cette démonstration :



4. Applications et compléments

1. Représentation graphique de f .



Pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$, posons $\mathcal{C}_\vartheta = \mathcal{A}_\vartheta \cup \mathcal{A}_{\vartheta+\pi} \cup \{a, b\}$; il s'agit d'un cercle ou d'une droite passant par a et b . Étant donné $z \in \mathbb{C} - \{a, b\}$, il existe un unique couple $(r, \vartheta) \in \mathbb{R}_{>0} \times (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$ tel que z appartienne à $\mathcal{M}_r \cap \mathcal{C}_\vartheta$: ce sont le module et une mesure modulo π de l'argument du nombre complexe non nul $f(z)$.

Les lignes de niveau \mathcal{M}_r et \mathcal{C}_ϑ s'intersectent *orthogonalement*, i.e. leurs tangentes sont orthogonales. Ceci peut se justifier en observant que :

- (i) f préserve les angles (orientés) entre tangentes car il s'agit d'une application *holomorphe* ;
- (ii) le cercle $f(\mathcal{M}_r)$ et la droite $f(\mathcal{C}_\vartheta)$ sont orthogonaux.

2. Les *théorèmes du cercle et de l'arc capables*, que l'on n'a pas utilisés, sont des conséquences directes du théorème 6.

3. *Critère de cocyclicité* : $m, n \in \mathbb{C} - \{a, b\}$ appartiennent à un cercle passant par a et b , ou à la droite (ab) , si et seulement si $f(m)$ et $f(n)$ sont alignés avec 0, c'est-à-dire si et seulement si $f(m)f(n)^{-1} = \left(\frac{m-a}{m-b}\right) \cdot \left(\frac{n-a}{n-b}\right)^{-1} \in \mathbb{R}$.

4. *Inversion et projection orthogonale sur une droite* — On peut donner une démonstration du théorème 2 reposant sur une propriété fondamentale des projections orthogonales : *la symétrie du rapport de projection*.

Rappel : si D_+ et D'_+ sont deux droites orientées et non parallèles, le *rapport de projection* (orthogonale) de D_+ sur D'_+ est le nombre réel

$$\lambda(D'_+/D_+) = \frac{\overline{Op(M)}}{\overline{OM}},$$

où O est le point d'intersection de D et D' , M est n'importe quel point de D' , $p(M)$ est son projeté orthogonal sur D et la mesure algébrique est définie sur chaque droite en référence à l'unique vecteur directeur unitaire compatible à son orientation.

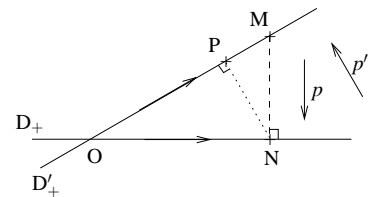
Changer l'orientation de l'une des droites revient à multiplier ce rapport par -1 , de sorte que sa valeur absolue ne dépend que des droites non orientées.

Si les droites D et D' ne sont pas perpendiculaires, alors le rapport de projection (orthogonale) $\lambda(D_+/D'_+)$ de D_+ sur D'_+ est également défini et

$$\lambda(D'_+/D_+) = \lambda(D_+/D'_+).$$

Il s'agit d'un résultat central de la leçon sur la projection orthogonale, qui équivaut à une identité métrique remarquable caractérisant les triangles rectangles (et équivalente au théorème de Pythagore) : avec les notations de la figure,

$$\lambda(D_+/D'_+) = \lambda(D'_+/D_+) \iff \overline{OP} \cdot \overline{OM} = ON^2.$$

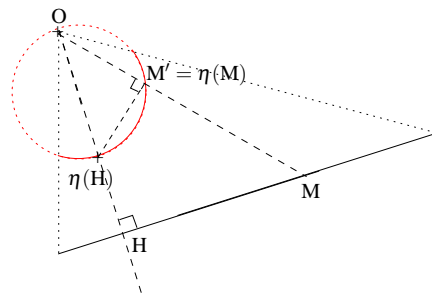


Venons-en à la démonstration du théorème 2. Considérons une droite Δ ne passant pas par l'origine et soit H le projeté orthogonal de O sur D . On désigne par C le cercle de diamètre $[O\eta(H)]$.

Étant donné un point M de Δ , on oriente les droites (OH) et (OM) par les vecteurs unitaires $\frac{\overline{OH}}{OH}$ et $\frac{\overline{OM}}{OM}$. La droite (OM) intersecte le cercle C en un point M' , projeté orthogonal de H sur (OM) . Par symétrie des rapports de projection,

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{O\eta(H)}} = \overline{OM'} \cdot \overline{OH}, \text{ d'où } \overline{OM'} = \frac{1}{\overline{OM}} = \overline{O\eta(M)} \text{ et donc } M' = \eta(M).$$

Ceci prouve l'inclusion $\eta(\Delta) \subset C - \{O\}$. L'inclusion réciproque se prouve de même, en partant d'un point M' de $C - \{O\}$.



Remarque — Cette démonstration n'utilise rien d'autre que la symétrie du rapport de projection et la caractérisation du cercle de diamètre $[IJ]$ comme ensemble des projetés orthogonaux de J sur les droites passant par I . Elle peut constituer une illustration des leçons sur la projection orthogonale dans le plan (25) et sur les relations métriques dans le triangle rectangle (32).