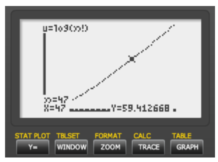
| DOSSIER Analyse 12 | **Thème** Calcul intégral |
|---|---|

**L'exercice proposé au candidat** Le but de l'exercice est d'étudier la croissance de la suite factorielle $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$.

1. En s'appuyant sur la méthode des rectangles, démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$\int_1^n \ln x \,\mathrm{d}x \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_1^{n+1} \ln x \,\mathrm{d}x.$$
2. Justifier que la fonction $x \mapsto x \ln \frac{x}{e}$ est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa fonction dérivée. En déduire une primitive de la fonction ln.
3. En déduire que la suite $u$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\ln(n!)}{n \ln n}$ est convergente et donner sa limite.
4. Déterminer un encadrement de 300! et de son nombre de chiffres.

**Éléments de réponses d'élèves à la question 4.**

(a) J'obtiens `ERR:OVERFLOW` pour 300!. La plus grande valeur que j'obtiens c'est $69! = 1,711224524 \cdot 10^{98}$, qui a donc 98 chiffres. Comme $35! = 1,033314797 \cdot 10^{40}$ a 40 chiffres, 300! devrait avoir autour de 400 chiffres.




(b) $300 \ln \frac{300}{e} = 1411,1347$ et $301 \ln \frac{301}{e} = 1416,8402$ donc $e^{1411} < 300! < e^{1417}$. Son nombre de chiffres $n$ est tel que `1E1411` $< 10^n <$ `1E1417`. En prenant le log de chaque membre, j'obtiens $1411 < n < 1417$.

(c) Comme le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes, j'ai écrit $u(n) = u(n-1) + \log(n)$ et j'ai calculé $u(300) = 615.485803$, il y a donc 615 chiffres à 300!.

**Le travail à exposer devant le jury**

1. Analysez les réponses proposées par les élèves en mettant en évidence la pertinence de leur démarche, l'origine des éventuelles erreurs et les moyens d'y remédier.
2. Proposez une correction de la question 4 telle que vous l'exposeriez devant une classe.
3. Proposer trois exercices sur le thème du calcul intégral.