

DOSSIER
Analyse 14

Thème Équations différentielles

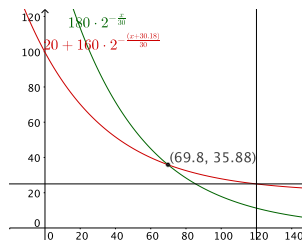
L'exercice proposé au candidat

Une loi de Newton stipule que la vitesse de refroidissement d'un corps reste proportionnelle à la différence entre la température de ce corps à l'instant t et la température constante de l'air ambiant (le coefficient de proportionnalité dépend essentiellement de la surface de contact entre le corps et son milieu, et on considérera ici que ce coefficient est constant).

1. Préciser et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la température $\theta(t)$ à l'instant $t > t_0$, d'un corps porté initialement (c'est-à-dire à l'instant t_0) à la température θ_0 , et qui est plongé dans un environnement dont la température constante est égale à θ_c .
2. La température de votre cuisine (et de votre appartement) est constante, égale à 20°C . Quand vous le sortez du four à 20h, la température du gâteau que vous avez préparé pour vos invités est 180°C . Vous observez qu'à 20h30 elle est encore de 100°C . A quelle heure pourrez-vous le servir à la température idéale, soit 25°C ?
3. La semaine suivante, vous voulez absolument servir le même gâteau à 22h précises, vous commencez par le placer dès sa sortie du four à 20h sur le rebord de votre fenêtre, où l'air ambiant est à une température de 0°C . Combien de temps devrez-vous le laisser sur ce rebord avant de le rentrer à l'intérieur pour que vos invités puissent le déguster à 22h à la température idéale ?

Éléments de réponses d'élèves.

1. Soit $\Delta = \theta_0 - \theta_c$, la loi de Newton dit que $\theta'(t) - \theta_c = k\Delta$ avec k qu'on ne connaît pas.
2. Ici, le gâteau se refroidit de 80°C en 30 minutes. Il sera donc à 25°C en $30 \times 75/80 = 28$ minutes, 7 secondes et 5 dixièmes, soit 2 minutes avant 21h.
3. **Autre élève**
Comme $\theta(t) - \theta_c = (\theta_0 - \theta_c)2^{-t/30}$, en le mettant à la fenêtre, on a donc $\theta(t) = 180 \times 2^{-t/30}$. Il faut savoir quand le rentrer pour qu'il ne se refroidisse plus aussi vite. En prenant la courbe précédente et en la décalant pour que la température à 120 minutes soit 25, on voit que cette courbe coupe la précédente à 69,8 minutes, où la température sera de $35,88^\circ\text{C}$. Il faut donc rentrer le gâteau à 21h10.



Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les réponses proposées par les élèves en mettant en évidence la pertinence de leur démarche, l'origine des éventuelles erreurs et les moyens d'y remédier.
2. Proposez une correction de la question 3 telle que vous l'exposeriez devant une classe.
3. Proposer trois exercices sur le thème des équations différentielles.