Master MEEF Maths **Capes Externe**
UE 2 **ORAL 2**
2014-2015

Dossier An 15	**Thème : Equations différentielles**

L'exercice

On considère l'équation différentielle $(E): \; y'' + 2y' + y = 2\, e^{-x}$
où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 e^{-x}$. Démontrer que h est une solution particulière de l'équation (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

4. Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -1$ et $f'(0) = 1$.

D'après Brevet de technicien supérieur Groupement B1 session 2014

Extrait du formulaire BTS, groupement B.

e) **Equations différentielles**

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 t}$ …….. où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{rt}$ ……… où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]\mathrm{e}^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

La réponse d'un étudiant de Section de Technicien Supérieur aux questions 1, 2 et 3.

1. *On reconnait* $x'' + 2x' + x = 0$ *avec* $a = 1$, $b = 2$ *et* $c = 1$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 1 = 0$ *donc* $x = -\dfrac{b}{2a} = -1$.
Donc, d'après le formulaire : $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{-t}$.
2. $h(x) = x^2 e^{-x}$ *donc* $h'(x) = -2x\, e^{-x}$ *et* $h''(x) = 2\, e^{-x}$
$h''(x) + 2h'(x) + h(x) = 2\, e^{-x} - 4x\, e^{-x} + x^2 e^{-x} = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$.
Je devrais trouver $2\, e^{-x}$ *donc j'ai dû faire une erreur de calcul et j'admets le résultat pour la suite.*
3. $y'' + 2y' + y = h''(x) + 2h'(x) + h(x)$
donc $y'' - h''(x) + 2\,(y' - h'(x)) + y - h(x) = 0$
Alors $y - h(x) = (\lambda t + \mu)e^{-t}$. *D'où* $y = (\lambda t + \mu)e^{-t} + h(x)$.
Les solutions de l'équation différentielle sont : $y = (\lambda t + \mu)e^{-t} + x^2\, e^{-x}$

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production l'élève en mettant en évidence ses réussites et les différentes erreurs que vous relevez .
2- Proposez une correction des questions **3** et **4** comme vous l'exposeriez devant une classe de STS.
3. Proposez deux ou trois exercices sur le thème « *équations différentielles* » .