

DOSSIER Analyse 16	Thème Séries de Fourier
-----------------------	--------------------------------

L'exercice proposé au candidat

On veut créer une courbe paramétrée polaire pilotée par quatre points le long des axes. Soit f la fonction réelle 2π -périodique définie par

- $f(t) = r_0$ pour $-\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{\pi}{4}$,
- $f(t) = r_1$ pour $\frac{\pi}{4} \leq t < 3\frac{\pi}{4}$,
- $f(t) = r_2$ pour $3\frac{\pi}{4} \leq t < 5\frac{\pi}{4}$,
- $f(t) = r_3$ pour $5\frac{\pi}{4} \leq t < 7\frac{\pi}{4}$.

1. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormal sur l'intervalle $[-\pi/2, 5\pi/2]$ pour $r_0 = 2, r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 3$.
2. La fonction f satisfait-elle aux conditions de Dirichlet ?
3. Soit $s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$ le développement de Fourier associé à la fonction f . Calculer les coefficients a_n et b_n dans le cas où $r_0 = 1$ et $r_1 = r_2 = r_3 = 0$. Justifier que la somme de cette série est égale à f sur un ensemble qu'on déterminera.
4. De même, calculer les coefficients de Fourier associés à la fonction f dans les trois autres cas où l'un seulement des quatre rayons n'est pas nul.
5. En déduire les coefficients de Fourier associés à la fonction f dans le cas général.
6. **Application** : Tracer la courbe paramétrée polaire \mathcal{C}_f définie par

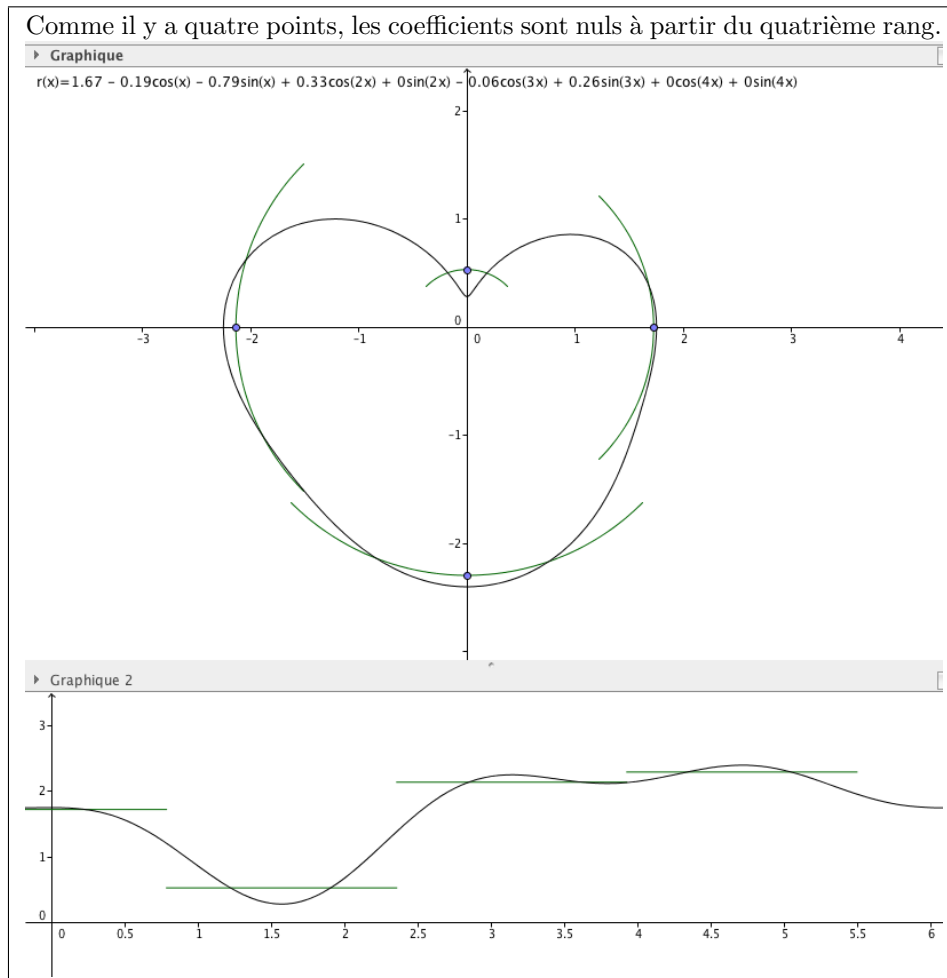
$$t \mapsto f(t) (\cos(t), \sin(t))$$

où f est la fonction décrite en 1, puis l'allure de la courbe paramétrée polaire \mathcal{C}_r définie par $t \mapsto r(t) (\cos(t), \sin(t))$ où

$$t \mapsto r(t) = \sum_{n=0}^4 (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

est la série de Fourier associée à f , tronquée aux cinq premiers termes.

Éléments de réponse d'élève à la question 6.



Le travail à exposer devant le jury

1. Énoncer les notions et outils utilisés pour la résolution de l'exercice.
2. Analyser les éléments de réponses de l'élève.
3. Utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour illustrer cet exercice et proposer des généralisations possibles.
4. Proposer trois exercices mettant en pratique d'autres applications des séries de Fourier.