

DOSSIER Analyse 8	Thème Suites et fonctions
----------------------	----------------------------------

L'exercice proposé au candidat Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}.$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Etudier les variations de f .
2. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique muni d'un tableur, calculez les valeurs de la suite u_n pour les 30 premières valeurs de n . Visualiser le graphe de la fonction f , la droite diagonale $y = x$, la suite de segments verticaux entre les points de coordonnées (u_n, u_n) et (u_n, u_{n+1}) , et la suite de segments horizontaux entre les points de coordonnées (u_n, u_n) et (u_{n-1}, u_n) .
3. (a) Quelle(s) conjecture(s) peut-on émettre sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
(b) Montrer que, pour tout entier positif n on a $1 \leq u_n \leq 2$.
(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
(d) Conclure.

Éléments de réponse d'élève à la question 3b.

$$1 \leq u_n \leq 2$$

Initialisation : On vérifie que la propriété est vraie pour $n = 0$.

$u_0 = 2$ or $2 \leq 2$ et même $2 = 2$. La propriété s'initialise.

Hérédité : On suppose que la propriété est vraie pour tout entier $p \geq 0$.

On veut montrer qu'elle est encore vraie au rang $p + 1$ donc $1 \leq u_p \leq 2$,

$$2 \leq 2u_p \leq 4,$$

$$3 \leq 2u_p + 1 \leq 5 \text{ et } 2 \leq u_p + 1 \leq 3.$$

Comme les nombres sont positifs, on peut diviser donc

$$1 \leq \frac{3}{2} \leq \frac{2u_p + 1}{u_p + 1} \leq \frac{5}{3} \leq 2.$$

Conclusion : la propriété s'initialise pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la réponse proposée par l'élève en mettant en évidence la pertinence de sa démarche, l'origine de ses éventuelles erreurs et des moyens d'y remédier.
2. Proposez une correction de la question 3c telle que vous l'exposeriez devant une classe dont vous préciserez le niveau.
3. Proposer deux exercices sur le thème des suites et fonctions.