

Dossier An 9

Thème : Suites et fonctions

L'exercice

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

On note f la fonction définie sur l'intervalle $] -2 ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$

- 1) A l'aide de la calculatrice, calculer les 20 premiers termes de la suite (u_n) . Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
- 2) Etudier les variations de f sur l'intervalle $] -2 ; +\infty [$.
- 3) Démontrer que pour tout entier n , $u_n > 1$.
- 4) Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1.

Des productions de trois élèves de terminale S

Elève 1

Question 3. *J'utilise un raisonnement par récurrence :*

Initialisation : je vérifie que $u_0 > 1$. C'est vrai : $5 > 1$

Hérédité : je suppose que, pour tout entier p , $u_p > 1$.

Alors : $4u_p - 1 > 3$ et $u_p + 2 > 3$. Comme les nombres sont positifs, on peut diviser et on obtient $\frac{4u_p - 1}{u_p + 2} > \frac{3}{3}$ c'est-à-dire que $u_{p+1} > 1$.

J'ai bien démontré par récurrence que la suite est minorée par 1.

Elève 2

Question 4. *Pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$.*

Or, j'ai démontré à la question 2 que f est croissante sur $] -2 ; +\infty [$ donc la suite (u_n) est elle aussi croissante.

Mon raisonnement doit être faux parce que j'ai vu à la calculatrice que la suite est décroissante.

Elève 3

Question 4. $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$.

Un carré est toujours négatif donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

Donc la suite est décroissante. Comme elle est minorée par 1, elle converge vers 1.

Le travail à exposer devant le jury

- 1) Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses réussites, l'origine de ses éventuelles erreurs et les moyens d'y remédier.
- 2) Proposez une correction de la question 4) telle que vous la présenteriez à des élèves de terminale S

- 3)** Ecrivez un algorithme permettant de déterminer à partir de quel rang on a : $u_n < 1,001$
Implémentez cet algorithme sur le matériel de votre choix et déterminez ce rang.
- 4)** Présentez deux exercices sur le thème « Suites et fonctions ». Vous prendrez soin de motiver vos choix.