Université Claude Bernard–Lyon I
CAPES de Mathématiques : Algèbre et géométrie
Année 2006–2007

Deuxième épreuve 2001

I Suites linéaires récurrentes

I.A. Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{R}(a,b)$

I.A.1. C'est évident par récurrence. Traduction : cette question m'embarrasse.
Posons $u_0 = x$ et $u_1 = y$. Pour $n \geq 2$, notons H_n l'assertion : il existe $u_2, \dots, u_n \in \mathbb{K}$ uniquement définis tels que pour $0 \leq k \leq n-2$, on ait : $u_{k+2} = au_{k+1} + bu_k$. L'assertion H_2 est triviale : $u_2 = au_1 + bu_0$ est le seul qui marche. De même, il est trivial que, pour n donné, H_n entraîne H_{n+1} : $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$ est l'unique élément qui assure H_{n+1}.
Par récurrence, il existe une unique suite (u_n) satisfaisant (1).

I.A.2. La suite nulle appartient à $\mathcal{R}(a,b)$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u' = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathcal{R}(a,b)$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ deux scalaires : la combinaison linéaire $w = \lambda u + \lambda' u'$ a pour terme d'indice $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \lambda u_n + \lambda' u'_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$w_{n+2} = \lambda u_{n+2} + \lambda' u'_{n+2} = \lambda(au_{n+1} + bu_n) + \lambda'(au'_{n+1} + bu'_n) = aw_{n+1} + bw_n,$$

un élément de $\mathcal{R}(a,b)$. D'où le fait que $\mathcal{R}(a,b)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{K})$.

<u>Variante</u> : Soit $D : \mathcal{S}(\mathbb{K}) \to \mathcal{S}(\mathbb{K})$ l'application (décalage) qui à une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $(Du) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que D est linéaire : pour $u, u' \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$, $w = \lambda u + \lambda' u'$, et $n \in \mathbb{N}$, on a : $w_n = \lambda u_n + \lambda' u'_n$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (Dw)_n = \lambda u_{n+1} + \lambda' u'_{n+1} = \lambda (Du)_n + \lambda' (Du')_n,$$

d'où $Dw = \lambda\, Du + \lambda'\, Du'$. Or,une suite u appartient à $\mathcal{R}(a,b)$ si, et seulement si $D^2 u = aDu + bu$. Ainsi, $\mathcal{R}(a,b) = \mathrm{Ker}(D^2 - aD - b\mathrm{Id})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{K})$.

On montre à présent que U est un isomorphisme. L'application U est une bijection, dont la réciproque est $\mathcal{R}(a,b) \to \mathbb{K}^2$, $(u_n) \mapsto (u_0, u_1)$. Vérifions qu'elle est linéaire. Pour tout $(x,y), (x',y') \in \mathbb{K}^2$, et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$, notons $U(x,y) = (u_n)$, $U(x',y') = (u'_n)$ et $U(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y') = (w_n)$. Pour $n = 0, 1$, on a :

$$w_0 = \lambda x + \lambda' x' = \lambda u_0 + \lambda' u'_0 \quad \text{et} \quad w_1 = \lambda y + \lambda' y' = \lambda u_1 + \lambda' u'_1.$$

Comme de plus, les suites (w_n) et $(\lambda u_n + \lambda' u'_n)$ satisfont la relation (1), elles sont égales : $U(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y') = \lambda U(x,y) + \lambda' U(x',y')$. Ceci prouve la linéarité de U.
On en déduit que $\mathcal{R}(a,b)$ a la même dimension que $\mathbb{K}^2$, c'est-à-dire 2.

<u>Variante</u> : On vient de montrer que $\mathcal{R}(a,b)$ est un espace vectoriel. Considérons l'application $\mathcal{R}(a,b) \to \mathbb{R}^2$, $(u_n) \mapsto (u_0, u_1)$. La première question montre que pour $u = (u_n) \in \mathcal{R}(a,b)$, on a : $u = U(u_0, u_1) = U \circ V(u)$. Il est évident que $V \circ U(x,y) = (x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{K}^2$. Bref, V est une bijection de $\mathcal{R}(a,b)$ sur $\mathbb{R}^2$. Or, V est trivialement linéaire, donc U également, donc U est un isomorphisme linéaire entre ces deux espaces de dimension 2.

I.B. Bases de $\mathcal{R}(a,b)$ selon les racines de (C)

I.B.1. a. Soit $r \in \mathbb{K}$. si la suite $(r^n)_n$ appartient à $\mathcal{R}(a,b)$, alors, la relation (1) écrite pour $n = 0$ montre que $r^2 = ar + b$. Inversement, si $r^2 = ar + b$, on peut pour tout $n \in \mathbb{N}$ multiplier membre à membre cette relation par r^n pour obtenir la relation (1).

Attention ! *Il y a beaucoup de bonnes raisons pour poser $r^0 = 1$ lorsque $r = 0$, ou plus généralement $r \leq 0$. La principale, c'est de faire en sorte que la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r \mapsto r^0$ soit* continue *en 0, ce qui est bien le moins pour une fonction polynômiale.*
Noter aussi que poser $r^0 = 0$ pour $r = 0$ conduit à mettre la suite $(0^n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{R}(a,b)$ pour tout $a, b \in \mathbb{K}$, contrairement à ce qu'annonce l'énoncé.

b. Supposons à présent que r soit une racine double de $X^2 - aX - b$. On a alors, par unicité des coefficients d'un polynôme :

$$X^2 - aX - b = (X - r)^2 = X^2 - 2r + r^2 \iff a = 2r \text{ et } b = -r^2.$$

Mais alors, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(n+2)r^{n+2} - a(n+1)r^{n+1} - bnr^n = (n+2)r^{n+2} - 2r(n+1)r^{n+1} + r^2nr^n = 0.$$

I.B.2. a. Supposons que $X^2 - aX - b$ admette deux racines simples r_1 et r_2. Alors les suites (r_1^n) et (r_2^n) sont des éléments de $\mathcal{R}(a,b)$. Leurs antécédents par U sont les vecteurs $(1, r_1)$ et $(1, r_2)$ de $\mathbb{K}^2$: ces deux vecteurs forment une famille libre, car leur déterminant (dans la base canonique) est $r_2 - r_1 \neq 0$. Il en résulte que les suites (r_1^n) et (r_2^n) forment une famille libre également, donc, par dimension, une base de $\mathcal{R}(a,b)$.

b. Supposons que $X^2 - aX - b$ admette une racine double $r \neq 0$. Comme ci-dessus, les antécédents des suites (r^n) et (nr^n) par U sont $(1, r)$ et $(0, 1)$, vecteurs non colinéaires puisque le déterminant est 1. On en déduit que les suites (r^n) et (nr^n) forment une base de $\mathcal{R}(a,b)$.
Si $r = 0$ est racine double, ça marche encore si on part de (r^n) et (nr^{n-1}) (avec $0^0 = 1$). Ainsi, les suites $(1, 0, 0, \dots)$ et $(0, 1, 0, 0, \dots)$ (nulles à partir de $n = 2$) forment un base de $\mathcal{R}(0,0)$.

c. Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $re^{i\alpha}$ et $re^{-i\alpha}$ sont les racines complexes de $X^2 - aX - b$. Les suites $(r^n e^{ni\alpha})$ et $(r^n e^{-ni\alpha})$ sont des suites complexes satisfaisant notre relation de récurrence préférée, donc leur demi-somme et leur demi-différence, (cette dernière divisée par i) aussi, et ce sont des suites réelles. Ainsi, sans calcul, on voit que $(r^n \cos n\alpha)$ et $(r^n \sin n\alpha)$ appartiennent à $\mathcal{R}(a,b)$. Leurs antécédents par u sont $(1, r\cos\alpha)$ et $(0, r\sin\alpha)$, dont le déterminant est $r\sin\alpha \neq 0$, donc ces deux suites forment une base de $\mathcal{R}(a,b)$.

Attention ! *Comme ici, on a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les suites $(r^n \exp(\pm n\alpha))$ n'appartiennent pas à $\mathcal{R}(a,b)$.*

I.C. Exemples

I.C.1. Pour la suite de Fibonacci, l'équation caractéristique est : $X^2 - X - 1 = 0$, dont les racines sont $\varphi = (\sqrt{5}+1)/2$ et $-1/\varphi = (-\sqrt{5}+1)/2$. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout n, on ait $F_n = a\varphi^n + b(-\varphi)^{-n}$. Pour $n = 0, 1$, on trouve un système

$$a + b = 0 \text{ et } a\frac{\sqrt{5}+1}{2} + b\frac{-\sqrt{5}+1}{2} = 1,$$

ayant pour solutions $a = -b = 1/\sqrt{5}$. Comme $|\varphi| > |\varphi^{-1}|$, on a pour n grand :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^n \sim_{n\to+\infty} \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.$$

I.C.2. a. Pour $n = 1$, on a : $D_1 = \alpha$. Pour $n = 2$, $D_2 = \alpha^2 - \beta\gamma$. Soit $n \geq 3$. On développe le déterminant D_n par rapport à la première ligne :

$$D_n = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} - \beta \begin{vmatrix} \gamma & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \gamma & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}.$$

En développant le deuxième déterminant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\forall n \geq 3, \quad D_n = \alpha\, D_{n-1} - \beta\gamma\, D_{n-2}.$$

En posant $D_0 = 1$, cette relation est satisfaite pour $n = 2$.

Attention ! *Ne pas écrire "donc $D_0 = 1$" ou "il faut que $D_0 = 1$", car si $\beta\gamma = 0$, n'importe quelle valeur convient.*

b. Désormais, on suppose $\beta = \gamma = 1$. Ici, $\alpha = 2$. L'équation caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = 0$, soit $(X-1)^2 = 0$. On sait qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout n, $D_n = a + bn$, et on trouve avec $n = 0, 1$: $a = D_0 = 1$ et $b = D_1 - a = 1$. Bref : $D_n = n + 1$ pour tout n.

Ici, $\alpha = \sqrt{2}$. L'équation caractéristique devient $X^2 - \sqrt{2}X + 1 = 0$, dont les solutions sont $(\sqrt{2} \pm i\sqrt{2})/2 = \exp(\pm i\pi/4)$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $D_n = a\cos(n\pi/4) + b\sin(n\pi/4)$, satisfaisant : $a = D_0 = 1$ et $(a+b)/\sqrt{2} = D_1 = \sqrt{2}$, d'où $b = 1$ également. On en tire :

$$D_n = \cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{n\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{(n-1)\pi}{4}.$$

I.C.3. Matrices symétriques de rang 2

a. Un exemple. On a :

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 & 12 \\ 8 & 4 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 4 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

On constate que : $M^3 = M + M^2$.

b. Pour $n = 1, 2$, on peut prendre $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$ (on n'a d'ailleurs pas le choix, car M et M^2 ne sont pas proportionnelles). Supposons que pour un certain $n \geq 1$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $M^n = a_n M + b_n M^2$. Alors, on aura :

$$M^{n+1} = a_n M^2 + b_n M^3 = a_n M^n + b_n(M + M^2) = b_n\, M + (a_n + b_n)M^2.$$

On peut donc prendre $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$, ce qui définit par récurrence un couple de suites $((a_n), (b_n))$ répondant à la question. (En fait, un tel couple est unique car M et M^2 ne sont (toujours) pas colinéaires, mais l'énoncé ne s'en préoccupe pas.)

c. Noter que l'on peut écrire

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix},$$

et on reconnaît la matrice-compagnon[1] du polynôme $X^2 - X - 1$ qui, surprise-surprise, va réapparaître dans quelques instants... Pour $n \geq 1$, on a :

$$a_{n+2} = b_{n+1} = a_n + b_n = a_n + a_{n+1},$$

relation de récurrence bien connue, dont l'équation caractéristique est $X^2 - X - 1 = 0$. C'est celle qui définit les nombres de Fibonacci. En constatant que $a_2 = 0 = F_0$, $a_3 = 1 = F_1$, on en déduit que pour $n \geq 2$, $a_n = F_{n-2}$, d'où $b_n = F_{n-1}$.

d. Matrice symétrique de rang 2 quelconque

i.

Idée *On se demande pourquoi P est supposée symétrique. La réponse doit sortir en réflexe : une matrice symétrique réelle est diagonalisable (dans une base orthonormée).*

[1] Voir problème de synthèse dans le poly d'algèbre linéaire.

On veut montrer que P^3 est une combinaison linéaire de P et P^2. Supposons que P soit diagonale. Comme son rang est 2, elle possède deux valeurs propres non nulles, qu'on va noter λ et μ.
On constate que 0, λ et μ sont les racines (distinctes ou pas) du polynôme $X(X-\lambda)(X-\mu)$. On en déduit par calcul immédiat que ce polynôme annule la matrice P : $P^3 = \alpha P + \beta P^2$, avec $\alpha = \lambda + \mu$ et $\beta = -\lambda\mu$.

Variante à la main : On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $P^3 = \alpha P + \beta P^2$: en calculant directement (facile avec une matrice diagonale !), on constate que ceci est équivalent au système :

$$\begin{cases} \lambda^3 = \lambda\, \alpha + \lambda^2\, \beta \\ \mu^3 = \mu\, \alpha + \mu^2\, \beta, \end{cases}$$

dont le déterminant est $\lambda\mu(\mu - \lambda)$. Si λ ou μ est nul, au moins une des équations disparaît, donc il y a une infinité de solutions (α, β) ; si $\lambda\mu \neq 0$ et $\lambda = \mu$, une équation est répétée et il y a aussi une infinité de solutions ; si $\lambda\mu(\mu - \lambda) \neq 0$, il y a une unique solution.
Dans tous les cas, on a montré l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $P^3 = \alpha P + \beta P^3$.
A présent, si P est symétrique quelconque, elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On peut donc trouver Q carrée inversible telle que $P = QDQ^{-1}$, où D est une matrice diagonale. Comme le rang de D est 2, comme P, ce qui précède assure l'existence de $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $D^3 = aD + bD^2$. On constate que cette relation entraîne $P^3 = aP + bP^3$, comme souhaité.

ii. Ainsi, le calcul de P^3 permet de trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $P^3 = \alpha P + \beta P^2$. On montre par récurrence qu'il existe, pour $n \geq 1$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $P^n = a_n P + b_n P^2$. Il va de soi qu'on peut prendre $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$. Supposons la relation établie pour un certain $n \geq 2$. Alors :

$$P^{n+1} = a_n P^2 + b_n P^3 = a_n P^2 + b_n(\alpha P + \beta P^2) = \alpha b_n P + (a_n + \beta b_n) P^2.$$

On peut donc prendre

$$\begin{cases} a_{n+1} &= & \alpha b_n \\ b_{n+1} &= & a_n + \beta b_n, \end{cases}$$

ce qui conclut la récurrence. On constate que pour $n \geq 1$, on a :

$$a_{n+2} = \alpha b_{n+1} = \alpha a_n + \alpha\beta b_n = \alpha a_n + \beta a_{n+1},$$

et on connaît a_1 et a_2, ce qui permet de calculer a_n pour tout n.

III Une propriété arithmétique

III.A. Un exemple numérique

On calcule : $u_{30} = -24\,475$, $u_{45} = -3\ 814\ 273$, $u_{30} \wedge u_{45} = -89 = u_{15} = u_{35 \wedge 45}$.

III.B. Parties autosymétriques

III.B.1. Autosymétrie de $k\mathbb{N}$

Soit $n \in k\mathbb{N}$, et soit $j \in [\![0, n]\!]$. A voir : $n - j \in k\mathbb{N}$ si, et seulement si $n + j \in k\mathbb{N}$.
On a : $n \mp j = 2n - (n \pm j)$, donc $n \in k\mathbb{Z}$ et $n \pm j \in k\mathbb{Z}$ entraînent $n \mp j \in k\mathbb{Z}$. Or, puisque $j \in [\![0, n]\!]$, $n - j$ et $n + j$ sont positifs ou nuls. D'où la propriété.

III.B.2. Réciproque

Soit A autosymétrique et k le plus petit élément de A non nul. On veut montrer que $A = k\mathbb{N}$. Commençons par montrer que $k\mathbb{N} \subset A$. On sait déjà que $0, k \in A$. Supposons que pour un certain $\ell \in \mathbb{N}^*$, A contienne $0, k, 2k, \ldots, \ell k$. Alors, en appliquant l'hypothèse à $n = \ell k$ et $j = k$, puisque $(\ell - 1)k \in A$, on obtient que $(\ell + 1)k \in A$. On en déduit par récurrence que $k\mathbb{N} \subset A$.

Pour montrer l'inclusion inverse, fixons $n \in A$. Ecrivons la division euclidienne de n par k : $n = \ell k + r$, avec $0 \leq r < k$. Par minimalité de k dans $A \setminus \{0\}$, $n = 0$ ou $\ell \geq 1$.

Si ℓ est impair, le symétrique de n par rapport à $(\ell+1)k/2$, à savoir $n' = (\ell+1)k - n = k - r$ appartient à A et à $]\!]0, k]\!]$, donc $k - r = k$ et $n = \ell k$.
Si ℓ est pair, on remplace n par son symétrique par rapport à $(\ell+1)k$, à savoir $\tilde{n} = 2(\ell+1)k - n$, et on applique le cas précédent à $\tilde{n} \in [\![(\ell+1)k, (\ell+2)k[\![$ avec $\ell + 2$ pair : on voit que $\tilde{n} \in k\mathbb{N}$, d'où $n \in k\mathbb{N}$. (Faire un dessin !)

<u>Variante pour $A \subset k\mathbb{N}$</u> : On montre par récurrence sur $\ell \in \mathbb{N}$ que $A \cap [\![0, \ell k]\!] = \{0, k, \ldots, \ell k\}$. Pour $\ell = 0$, c'est évident, et pour $\ell = 1$, c'est la minimalité de k qui joue. Si l'assertion est vraie pour un certain $\ell \geq 1$, et si $n \in A \cap]\!]\ell k, (\ell+1)k]\!]$, on considère le symétrique de n par rapport à $\ell k \in A$: c'est $n' = 2\ell - n \in A \cap [\![(\ell-1)k, \ell k[\![$. On en déduit que $n' = (\ell-1)k$, puis que $n = (\ell+1)k$. On peut conclure.

III.C. Etude de $A(d)$

III.C.1. Autosymétrie de $A(d)$ lorsque $d \wedge q = 1$

a. On montre par récurrence sur k que d divise $u_{n+k} + (-q)^k u_{n-k}$. Pour $k = 0$, c'est évident. Pour $k = 1$, on a : $u_{n+1} - qu_{n-1} = pu_n$, évidemment divisible par u_n. Supposons que pour un certain $k \in [\![1, n-1]\!]$, et pour tout $j \leq k$, d divise $u_{n+j} + (-q)^j u_{n-j}$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+k+1} + (-q)^{n+k+1} u_{n-k-1} &= pu_{n+k} + qu_{n+k-1} + (-q)^{n+k}(pu_{n-k} - u_{n-k+1}) \\ &= p\left(u_{n+k} + (-q)^{n+k} u_{n-k}\right) + q\left(u_{n+k-1} + (-q)^{n+k-1} u_{n-(k-1)}\right) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, chacun des termes est divisible par d : on peut conclure.

b. Il n'y a qu'à écrire... Par hypothèse, $u_0 = 0$ donc $d|u_0$, et $0 \in A(d)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Si $d|u_{n-k}$, alors d divise $u_{n+k} - (-q)^{n+k} u_{n-k}$ et $(-q)^{n-k} u_{n-k}$, donc d divise leur somme u_{n+k}. Inversement, si d divise u_{n-k}, alors d divise $(-q)^{n+k} u_{n-k}$. Puisque d est premier à q, le lemme de Gauss permet d'en déduire que d divise u_{n-k}. Ainsi, $A(d)$ est autosymétrique.

III.C.2. Petitesse de $A(d)$ si $d \wedge q > 1$

a. L'hypothèse convenable est : $q \neq \pm 1$. Ceci dit, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque c divise q, c divise $qu_{n-1} = u_{n+1} - pu_n$. Supposant que c divise u_{n+1}, on en déduit que c divise pu_n, donc, par le lemme de Gauss et l'hypothèse $p \wedge q = 1$, c divise u_n.Contraposément, si c ne divise pas u_n, alors c ne divise pas u_{n+1}. Vu que c ne divise pas $u_1 = 1$, on conclut par récurrence.

<u>Variante</u> : On réduit modulo c. Pour $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} \equiv pu_n$ $[c]$. Compte tenu de $u_1 = 1$, on en déduit par une récurrence immédiate que $u_n \equiv p^{n-1}$ $[c]$. Or, p est premier à q, donc $p \not\equiv 0$ $[c]$, donc, puisque c est premier, p^{n-1} n'est pas divisible par c. Par suite, u_n non plus.

b. Si $d \wedge q \neq 1$, il existe un nombre premier c qui divise d et q. A supposer que $A(d)$ contienne un élément $n > 0$, on aurait donc : $c|d|u_n$. Or, on vient de voir qu'une telle relation de divisibilité n'est pas possible si $c|q$. Contradiction, d'où $A = \{0\}$.

III.D. Relation entre $D = u_m \wedge u_n$ et $u_d = u_{m\wedge n}$

III.D.1. Par définition, D divise u_d si et seulement si $d \in A(D)$. D'après III.C.2.a, D et q sont premiers entre eux (sinon, un diviseur premier de q diviserait u_m, ce qui est impossible). Par III.C.1.b, $A(D)$ est autosymétrique. Par III.B, il existe k tel que $A(D) = k\mathbb{N}$. Or, $m \in A(D)$, car $D = u_m \wedge u_n | u_m$; de même, $n \in A(D)$. On en déduit que k divise m et n, i.e. k divise d, i.e. $d \in A(D)$, i.e. D divise u_d.

III.D.2. Inversement, montrons que u_d divise u_m et u_n. Puisque $u_d|u_d$, on a : $d \in A(u_d)$. D'après la contraposée de III.C.2.b, u_d et q sont donc premiers entre eux. Par suite, $A(u_d)$ est autosymétrique, donc de la forme $k\mathbb{N}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ convenable. Mais alors, on a : $k|d|m$ et $k|d|n$, si bien que $m, n \in k\mathbb{N} = A(u_d)$. On en conclut que u_d divise $u_m \wedge u_n = D$.

<u>Variante</u> : En appliquant III.C.1.a à $d \leftarrow u_d$, $n \leftarrow jd$ et $k \leftarrow d$, on voit que si u_d divise u_{jd}, alors u_d divise $u_{(j+1)d}$. Comme u_d divise u_d, le principe de récurrence permet d'en déduire que u_d divise u_{jd} pour tout $j \geq 1$. En particulier, u_d divise u_m et u_n, donc u_d divise D.

III.D.3. Au signe près, les nombres $u_{m\wedge n}$ et $u_m \wedge u_n$ sont donc égaux.

IV Représentations de Fibonacci et Zeckendorf

IV.A. F-représentations de 37

Algorithme récursif : pour chercher une F-représentation d'un entier n, on choisit un nombre de Fibonacci $v_k \leq n$ et on cherche une F-représentation de $n - v_k$ dont le plus grand élément est $< v_k$. On trouve 6 F-représentations, dont une seule de Zeckendorf :

$$37 = \overline{1\,011\,011} = \overline{1\,011\,100} = \overline{1\,100\,011} = \overline{1\,100\,100} = \overline{10\,000\,011} = \overline{10\,000\,100}.$$

IV.B. Egalités fondamentales

Voici une façon de procéder, mais j'ai vu mieux dans les copies. Pour $n = 0$, on a : $\sigma_0 = v_0 = 1 = v_1 - 1$ et $S_0 = v_0 = v_2 - 2$. Pour[2] $n = 1$, on a : $s_1 = v_1 = v_2 - 1$ et $S_1 = v_0 + v_1 = 3 = v_3 - 2$. Supposons que, pour un certain $n \geq 2$, on ait $\sigma_{n-1} = v_n - 1$ et $S_{n-1} = v_{n+1} - 2$. Alors

$$S_n = S_n + v_n = v_{n+1} + v_n - 2 = v_{n+2} - 2.$$

Remarquons que σ_n est la somme de tous les termes v_i d'indice $i \leq n$ de même parité que n. Par suite, σ_{n-1} est la somme de tous les termes v_j d'indice $j \leq i$ de parité opposée à n. En d'autres termes, on a pour tout n :

$$\sigma_n + \sigma_{n-1} = S_n.$$

L'hypothèse de récurrence et ce qu'on sait de S_n donnent alors :

$$\sigma_n = S_n - \sigma_{n-1} = v_{n+2} - 2 - (v_n - 1) = v_{n+1} - 1.$$

On conclut par récurrence.

IV.C. Représentation de Zeckendorf

IV.C.1. Indice du dernier "chiffre" non nul

a. Comme, dans une Z-représentation, deux chiffres consécutifs ne sont pas égaux à 1, on a pour tout k compris entre 0 et $s = \lfloor n/2 \rfloor$, on a : $a_{n-2k} + a_{n-2k-1} \leq 1$ (où on pose, si nécessaire, $a_{-1} = 0$) ; de plus, $v_{n-2k-1} \leq v_{n-2k}$. Par suite,

$$m = \sum_{k=0}^{s} (a_{n-2k} v_{n-2k} + a_{n-2k-1} v_{n-2k-1}) \leq \sum_{k=0}^{s} (a_{n-2k} + a_{n-2k-1}) v_{n-2k} \leq \sum_{k=0}^{s} v_{n-2k} = \sigma_n.$$

<u>Variante</u> : Notons $k_1 \leq \cdots \leq k_r = n$ les indices k tels que $a_k = 1$ dans la Z-représentation de m. Comme on a une Z-représentation de m, les indices k_i ne sont pas consécutifs, ce qui se traduit par : $k_i - k_{i-1} \geq 2$ pour $i = 2, \ldots, n$. On en déduit par récurrence descendante mais triviale que : $k_i \leq n - 2(r - i)$. Or, la suite (v_k) est croissante, et $\{n - 2(r - i),\ 1 \leq i \leq r\}$ est une partie de $\{n - 2k,\ 0 \leq k \leq s\}$, d'où :

$$m = \sum_{i=1}^{r} v_{k_i} \leq \sum_{i=1}^{r} v_{n-2(r-i)} \leq \sum_{k=0}^{s} v_k,$$

b. Comme $\sigma_n < v_{n+1}$, on a : $v_n \leq m < v_{n+1}$, exactement ce qu'on veut.

[2]Cette vérification est nécessaire, car la récurrence qui définit v_n porte sur les deux termes précédents.

IV.C.2. Existence et unicité de la Z-représentation

Idée *La question précédente dit comment commencer à construire la Z-représentation de* m *: le dernier "chiffre" non nul,* a_n*, a pour indice celui du plus grand nombre de Fibonacci inférieur ou égal à* m*. Problème éventuel : si la Z-représentation du nombre* $m - v_n$ *a des "chiffres" trop grands (par exemple, si* v_{n-1} *intervient), on n'obtiendra pas nécessairement une Z-représentation de* m *en ajoutant* v_n*.*

On prouve le résultat par une récurrence que les plus pédagogos trouveront forte. Moi, la récurrence forte me fait le même effet que la moutarde forte, ça me monte au nez. Bref : le cas $m = 1$ n'appelle pas de grand discours. Soit $m \geq 1$, supposons que tout nombre strictement inférieur à m possède un unique Z-représentation, montrons qu'il en est de même pour m.
L'unicité est facile : si $\overline{a_n \cdots a_0}$ et $\overline{b_p \cdots b_0}$ sont deux Z-représentations de m, avec $a_n = 1 = b_p$, on vient de montrer que $n = p$ est l'indice du plus grand des nombres de Fibonacci inférieurs ou égaux à m. Comme alors, $\overline{a_{n-1} \cdots a_0}$ et $\overline{b_{n-1} \cdots b_0}$ sont deux Z-représentations de $m - v_n$, l'hypothèse de récurrence permet de conclure.
Pour l'existence, c'est tout comme : on note n l'entier tel que $v_n \leq m < v_{n+1}$, et on écrit une Z-représentation de $m - v_n$: $\overline{a_r \cdots a_0}$, choisie de sorte que $a_r = 1$. On a :

$$v_{n-1} = v_{n+1} - v_n > m - v_n = \sum_{k=1}^{r} a_k v_r \geq a_r v_r = v_r,$$

si bien que $v_r < v_{n-1}$, ce qui, grâce à la croissance stricte de (v_k), donne : $r < n - 1$. Par suite, les indices r et n ne sont pas consécutifs : en d'autres termes, $\overline{a_n 0 \cdots 0 a_r \cdots a_0}$ est une Z-représentation de m.

IV.C.3. Calcul de la Z-représentation

La preuve précédente donne la recette –pardon, l'algorithme– qui associe à m la partie $f(m)$ formée des indices k avec $a_k = 1$ dans la Z-représentation de m :

- si $m = 1$, renvoyer $f(0) = \{0\}$;
- sinon,
  - initialiser $k = 0$; (on a : $v_0 = 1 \leq m$;)
  - tant que $v_k \leq m$, remplacer k par $k + 1$;
  - on obtient ainsi l'indice n tel que $v_n \leq m < v_{n+1}$;
  - renvoyer $f(m) = \{n\} \cup f(m - v_n)$.

IV.C.4. Quelques Z-représentations

On a : $272 = 233 + 34 + 5 = \overline{100010001000}$.

Soit $n \geq 1$. Par définition de σ_n, on a : $\sigma_n = \overline{10101010\cdots}$ (s chiffres 1, $n + 1$ chiffres en tout). Plus précisément, si $n = 2s$, $\sigma_n = \overline{101010\cdots 101}$; si $n = 2s + 1$, $\sigma_n = \overline{101010\cdots 1010}$.

Attention, on peut écrire $S_n = \overline{11\cdots 11}$, mais ce n'est pas une Z-représentation. Cependant, on a : $S_n = v_{n+2} - 2 = \sigma_{n+1} - 1$.
Si n est impair, $n + 1$ est pair, on a donc : $S_n = \overline{1010\cdots 101} - 1 = \overline{1010\cdots 100}$ ($n + 2$ chiffres).
Si n est pair, puisque $\overline{10} - 1 = \overline{01}$, on a : $S_n = \overline{1010\cdots 1010} - 1 = \overline{1010\cdots 1001}$ ($n + 2$ chiffres).

IV.C.5. Comparaison de nombres de chiffres

Attention ! *Si deux suites* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes, et si* f *est une fonction telle que* $f(u_n)$ *et* $f(v_n)$ *sont définis à partir d'un certain rang, il est* **faux** *en général que* $f(u_n) \sim f(v_n)$*. Prendre par exemple* $u_n = 1 + n^{-1}$*,* $v_n = 1 + n^{-2}$ *et* $f = \ln$*.*
Cependant, si $f = \ln$ *et si les suites tendent vers* $+\infty$*, on a aussi* $\ln v_n \to +\infty$*, d'où :*

$$\frac{\ln u_n}{\ln v_n} = \frac{\ln v_n + \ln \frac{u_n}{v_n}}{\ln v_n} = 1 + \frac{\ln \frac{u_n}{v_n}}{\ln v_n} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

a. Le nombre de chiffres de la Z-représentation de m est : $z(m) = n+1$, où n est tel que $v_n \leq m < v_{n+1}$. Par croissance du logarithme, on en déduit : $\ln v_n \leq \ln m < \ln v_{n+1}$.
Or, on sait que $v_n = F_{n+2}$, et que $F_{n+2} \sim \varphi^{n+2}/\sqrt{5}$. Grâce au rappel ci-dessus, on en tire : $\ln v_n \sim \ln v_{n+1} \sim n \ln \varphi$. (NB: il est faux de dire que $v_n \sim v_{n+1}$.)
Grâce aux inégalités liant v_n et m, il vient, pour m tendant vers $+\infty$:

$$z(m) \sim \ln m / \ln \varphi.$$

b. Le nombre de chiffres du développement décimal de m est $d(m) = k+1$, où k est caractérisé par $10^k \leq m < 10^{k+1}$. On en déduit que $d(m) \sim \ln m / \ln 10$. En comparant avec l'estimation de $z(m)$ ci-dessus, il vient :

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{z(m)}{d(m)} = \frac{\ln 10}{\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \simeq 4{,}8.$$

IV.D. Nombre de F-représentations

IV.D.1. Nombres ayant une seule F-représentation

Idée *Les nombres σ_n sont ceux dont la Z-représentation a autant de chiffres non nuls que possible : un nombre qui n'est pas un σ_n, c'est un nombre qui a deux zéros consécutifs dans sa Z-représentations. D'où l'idée de partir d'une telle caractérisation, et de produire une autre F-représentation Ca, c'est facile, et ça règle un sens.*
Réciproquement, il faut montrer l'unicité de la F-représentation de σ_n. Pour cela, on commence par constater que le premier chiffre est nécessairement a_n, et on embraye une récurrence.

Soit m un nombre qui n'est pas l'un des σ_n. Alors, en vertu de IV.C.4, la Z-représentation de m fait appraître deux zéros consécutifs, précédés d'un 1. Pour i convenable (pas nécessairement unique), on a :

$$m = \overline{a_n \cdots a_{i+1} 100 a_{i-3} \cdots a_0} = \overline{a_n \cdots a_{i+1} 011 a_{i-3} \cdots a_0}.$$

Ceci montre que $d(m) \geq 2$.
Inversement, on doit montrer que pour tout n, σ_n possède une seule F-représentation. On procède par récurrence. Si $n = 0$ ou 1, c'est clair. Supposons que pour un entier n, et pour tout $k \leq n-1$, σ_k n'ait qu'une seule Z-représentation. On part d'une F-représentation de σ_n, qu'on compare à ce qu'on connaît :

$$\sum_k a_k v_k = \sigma_n = v_{n+1} - 1 = v_n + v_{n-2} + v_{n-4} + \cdots .$$

Comme $\sigma_n < v_{n+1}$, on a bien sûr : $a_k = 0$ pour $k \geq n+1$. Notons ensuite que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k v_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} v_k = S_{n-1} = v_{n+1} - 2 < \sigma_n.$$

On en déduit que $a_n = 1$, puis que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k v_k$ est une F-représentation de $\sigma_n - v_n = \sigma_{n-2}$. Par hypothèse de récurrence, cette F-représentation est la Z-représentation de σ_{n-2}, d'où l'unicité de la F-représentation de σ_n.

IV.D.2. F-représentations des nombres de Fibonacci

Idée *Pour $n \geq 2$, deux F-représentations de v_n sautent aux yeux : v_n et $v_{n-1} + v_{n-2}$. On peut ensuite remplacer v_{n-2} par $v_{n-3} + v_{n-4}$, et ainsi de suite.*

On a évidemment : $\delta(v_0) = \delta(v_1) = 1$. Soit $n \geq 2$ et $\sum_k a_k v_k$ une F-représentation de v_n. Bien sûr, $a_k = 0$ dès que $k \geq n+1$. Si $a_n = 1$, alors $\sum_{k=0}^{n-1} a_k v_k = v_n - v_n = 0$, donc $a_k = 0$ pour $k \leq n-1$.

Supposons $a_n = 0$. Alors, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-2} a_k v_k \leq \sum_{k=0}^{n-2} v_k = S_{n-2} = v_n - 2 < v_n,$$

ce qui entraîne que $a_{n-1} \neq 0$, c'est-à-dire $a_{n-1} = 1$. Mais alors, $\sum_{k=0}^{n-2} a_k v_k$ est une F-représentation de $v_n - v_{n-1} = v_{n-2}$: il y a $\delta(v_{n-2})$ telles F-représentations.
On a montré que pour $n \geq 2$, $\delta(v_n) = \delta(v_{n-2}) + 1$. On en déduit facilement que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \delta(v_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

NB: ce raisonnement montre plus précisément que les F-représentations des nombres de Fibonacci sont les suivantes : $\overline{10\cdots 0}$, $\overline{110\cdots 0}$ et $\overline{1010\cdots 10110\cdots 0}$.

IV.D.3. Une propriété de symétrie de δ

Idée *Il y a une involution évidente sur les F-représentations : échanger les* 1 *et les* 0.
Pour un point x d'un intervalle $[a, b]$, la symétrie par rapport au milieu de $[a, b]$ est une involution de l'intervalle : le symétrique x' de x est caractérisé par $(x + x')/2 = (a + b)/2$, ou : $x' = a + b - x$.

Soit $m \in [\![v_{n-1} - 1, v_n - 1]\!]$, et m' le symétrique de m par rapport au milieu de $[\![v_{n-1} - 1, v_n - 1]\!]$:

$$m' = v_{n-1} - 1 + v_n - 1 - m = v_{n+1} - 2 - m = S_{n-1} - m$$

A présent, soit $m = \sum_k a_k v_k$ une F-représentation de m. Comme $m < v_n$, on sait que $a_k = 0$ pour $k \geq n$. On a :

$$m' = S_{n-1} - m = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - a_k) v_k.$$

Noter que pour $a \in \{0, 1\}$, $1 - a$ est l'autre élément de $\{0, 1\}$: $\sum (1 - a_k) v_k$ est donc une F-représentation de m'.
Ainsi, l'involution $m \longleftrightarrow m'$ sur $[\![v_{n-1} - 1, v_n - 1]\!]$ est induite par la substitution $1 \longleftrightarrow 0$ dans les F-représentations. Plus précisément, la substitution $1 \longleftrightarrow 0$ est une bijection entre les F-représentations de m et de m'. D'où finalement :

$$\delta(m) = \delta(m').$$

Exemple *En prenant $m = v_n - 1 = \sigma_n$, on a $m' = \sigma_{n-1}$, on écrit leurs F-représentations avec le même nombre de chiffres : $\sigma_n = \overline{1010\cdots}$ et $\sigma_{n-1} = \overline{0101\cdots}$.*