Université Claude Bernard–Lyon I
CAPES de Mathématiques : Analyse
Année 2009–2010

Capes 2002

Partie I

I..1. Interprétation géométrique

Pour $x \in I$, i.e. $x \neq 0$, on écrit $E(I)$ sous la forme :

$$\frac{f(x)}{x} = f'\left(\frac{x}{2}\right).$$

Dans le membre de gauche, $f(x)/x$ est la pente de la droite passant par l'origine O et le point de coordonnées $(x, f(x))$. Quant à $f'(x/2)$, c'est la pente de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x/2$. Deux droites ont la même pente si et seulement si elles sont parallèles. Ainsi, $E(I)$ traduit que la droite joignant l'origine à $(x, f(x))$ est parallèle à la tangente à la courbe de f au point $x/2$. Voir figure page suivante.

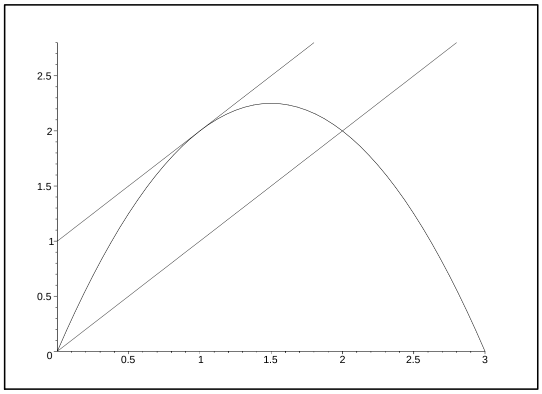
I..2. Trinômes du second degré

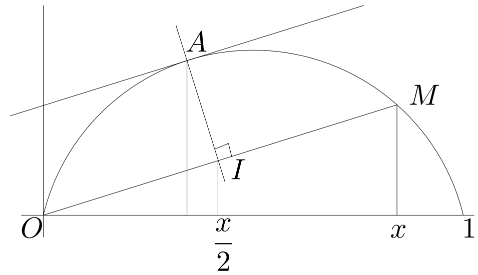
Le polynôme p est dérivable et : $p'(x) = 2ax + b$. Donc p est solution de $E(I)$ si et seulement si pour tout $x \in I$, on a : $ax^2 + bx + c = x(2a\frac{x}{2} + b)$. Cela arrive exactement lorsque $c = 0$.

I..3. Exemples graphiques

La réponse attendue est : Figures 4, 6, 7, 8. On détaille.
On dira « OUI » pour « la courbe de la figure n vérifie $E(I)$ », et « NON » sinon.

1. La droite horizontale est la courbe de la fonction $p(x) = 0$. Donc OUI d'après I.2.
2. C'est la courbe de la fonction $p(x) = 2x$, donc OUI par I.2.
3. C'est la courbe de la fonction $p(x) = x/2$, donc OUI par I.2.
4. C'est la courbe d'une fonction de la forme $p(x) = ax^2 + c$ avec $a > 0$ et $c > 0$. (On a $b = 0$ car le minimum est atteint en 0.) Du fait que $c \neq 0$, on répond NON par I.2.
5. C'est la courbe d'une fonction de la forme $p(x) = ax^2 + bx$ (avec $c = 0$ car la parabole passe par l'origine et $b < 0$ car elle a une deuxième racine > 0). Vu que $c = 0$, on répond OUI par I.2.
6. C'est le cas symétrique de la Fig. 4 : dans le repère Oyx, la courbe a pour équation $x = p(y)$ avec $a > 0$ et $b = 0$ et $c = 0$ (cf. 4. ci-dessus), donc c'est la courbe de $f(x) = \alpha\sqrt{x}$, avec $\alpha > 0$. Alors $xf'(x/2) = \alpha\sqrt{x}/\sqrt{2}$, donc on répond NON.
7. La réponse est NON pour le cercle. (Voir figure page suivante.) En effet, si $M = (x, f(x))$ (avec $x < 1$), les seuls points du cercle où la tangente est parallèle à la corde (OM) sont les intersections avec la médiatrice de $[OM]$; ici, un seul de ces deux points, A, est sur le graphe. Or, l'abscisse de A n'est pas $x/2$ car le milieu I de $[OM]$ a pour abscisse $x/2$ et, pour $x < 1$, la droite (AI) n'est pas verticale.
8. La réponse est NON. Par exemple, pour $x = 2$, on a : $f(2) = 0$ mais $2f'(1) < 0$, ça ne va pas. On peut aussi utiliser le fait que c'est la courbe de la fonction $f(x) = a\sin(\pi x)$.





Partie II

II.A Structure de $\mathcal{S}(I)$

II.A.1. $\mathcal{S}(I)$ comme espace vectoriel

L'ensemble $\mathcal{S}(I)$ n'est pas vide ni réduit à $\{0\}$ d'après I.2. Soit $f, g \in \mathcal{S}(I)$ et $, \mu \in \mathbb{C}$, notons $h = f + \mu\, g$. Puisque f et g sont dérivables, h l'est aussi et $h' = f' + \mu\, g'$, d'où pour tout $x \in I$: $h'(\frac{x}{2}) = f'(\frac{x}{2}) + \mu\, g'(\frac{x}{2})$ pour tout $x \in I$. Ainsi, $h(x) = f(x) + \mu\, g(x) = xf'(\frac{x}{2}) + \mu\, xg'(\frac{x}{2}) = xh'(\frac{x}{2})$. Ceci prouve que $\mathcal{S}(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}^1(I)$.
De façon analogue, $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$ est un espace vectoriel réel. (Même preuve, prendre et μ dans $\mathbb{R}$.)

II.A.2. Caractérisations des éléments de $\mathcal{S}(I)$

On sait qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable en x si et seulement si sa partie réelle $\Re \circ f : I \to \mathbb{R}$ et sa partie imaginaire $\Im \circ f : I \to \mathbb{R}$ le sont. On a alors : $(\Re \circ f)' = \Re \circ (f')$ et $(\Im \circ f)' = \Im \circ (f')$. Par suite, $\overline{f} = \Re \circ f - i \Im \circ f$ et on sait que f est dérivable si et seulement si $\overline{f}$ l'est et que $\overline{f}' = \overline{f'}$.
(i)$\Rightarrow$(ii) : si $f \in \mathcal{S}(I)$, alors d'après ce qui précède, on a pour tout $x \in I$: $(\Re \circ f)(x) + i(\Im \circ f)(x) = x(\Re \circ f)(\frac{x}{2}) + ix(\Im \circ f)(\frac{x}{2})$, d'où la propriété (ii) en séparant parties réelle et imaginaire.
(ii)$\Rightarrow$(iii) : puisque $\overline{f} = \Re \circ f - i \Im \circ f$, ceci résulte de l'inclusion $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I) \subset \mathcal{S}(I)$ et du fait que $\mathcal{S}(I)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
(iii)$\Rightarrow$(i) : vu que $\overline{f}' = \overline{f'}$ et que pour $x \in I$, on a : $\overline{x} = x$, on déduit de l'égalité $E(I)$ pour $\overline{f}$ la même égalité pour f en « conjugant membre à membre ». On peut aussi appliquer ce que l'on vient de démontrer (« (i)$\Rightarrow$(iii) ») à $\overline{f}$ pour obtenir que $\overline{\overline{f}} = f$ appartient à $S(I)$.

II.B Régularité des solutions

II.B.1. Dérivées itérées hors de 0

Montrons par récurrence sur n que f est $n+1$ fois dérivable et que

$$(H_n) \qquad \forall x \in I \setminus \{0\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{x}{2^n} f^{(n+1)}(\frac{x}{2}) + \frac{n}{2^{n-1}} f^{(n)}(\frac{x}{2}).$$

Par hypothèse, f est dérivable hors de 0 et on a : $f(x) = xf'(x/2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que f soit $n+1$ fois dérivable sur $I \setminus \{0\}$ et que (H_n) soit vraie.
Alors, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, $2x \in I \setminus \{0\}$, si bien que

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{2^n}{2x} f^{(n)}(2x) - \frac{2n}{2x} f^{(n)}(x).$$

Vu que $f^{(n)}$ est dérivable en $2x$ et en x, on en déduit que $f^{(n+1)}$ est dérivable en tout $x \in I \setminus \{0\}$.
Si on dérive $f^{(n)}$ en utilisant (H_n), on obtient :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{2^n} f^{(n+1)}(\frac{x}{2}) + \frac{x}{2^n}\frac{1}{2} f^{(n+2)}(\frac{x}{2}) + \frac{n}{2^{n-1}} f^{(n+1)}(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2^{n+1}} f^{(n+2)}(\frac{x}{2}) + \frac{n+1}{2^n} f^{(n+1)}(\frac{x}{2}).$$

Cela conclut la preuve.

II.B.2. Continuité de f' en 0

Par hypothèse, f est dérivable en 0 et on a : $f(0) = 0 \times f'(0) = 0$.
D'autre part, on peut écrire pour $x \in I \setminus \{0\}$: $f'(x) = \frac{f(2x)}{2x}$. Comme on sait que $\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-0}{2x-0}$ existe et vaut $f'(0)$, on en déduit que $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existe et vaut $f'(0)$.
En d'autres termes, f' est continue en 0. On a vu en B.1 que f' était continue sur $I \setminus \{0\}$, ce qui permet de conclure.

II.C Recherche de quelques solutions particulières

II.C.1. Fonction auxiliaire

II.C.1.a Cette fonction v est dérivable et, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$v'(t) = 2^{1-t} - t \ln 2\, 2^{1-t} = 2^{1-t}\,(1 - t\ln 2).$$

Ainsi, v' est strictement positive sur $]-\infty, 1/\ln 2[$ et strictement négative sur $]1/\ln 2, +\infty[$: elle est donc strictement croissante $]-\infty, 1/\ln 2[$ et strictement décroissante sur $]1/\ln 2, +\infty[$.
Accessoirement, elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers 0^+ en $+\infty$, mais on s'en fiche un peu.
II.C.1.b Notons $v(1) = 1 = v(2)$ et que $1 < 1/\ln 2 < 2$.
Comme v est strictement monotone sur $]-\infty, 1/\ln 2[$ et $]1/\ln 2, +\infty[$, c'est une injection sur chacun de ces intervalles, dans lequel on connaît un antécédent de 1 par v : il ne saurait y en avoir d'autres.
Remarquer que le théorème des valeurs intermédiaires n'est pas utile, donc la continuité non plus, car on connaît déjà les solutions.

II.C.2. Solutions polynômiales

Soit $f(x) = \sum_{t=0}^{n} a_t x^t$ une solution polynômiale de $E(I)$. Alors on a pour tout $x \in I$:

$$\sum_{t=0}^{n} a_t x^t = f(x) = x f'(\frac{x}{2}) = \sum_{t=0}^{n} t a_t \frac{x^t}{2^{t-1}} = \sum_{t=0}^{n} a_t\, t 2^{1-t}\, x^t.$$

Vu que $I \setminus \{0\}$ est infini (son intérieur n'est pas vide), deux fonctions polynômiales sur I sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux, d'où pour tout $t \in \{0, \ldots, n\}$: $a_t(1 - t2^{1-t}) = 0$. Or, on vient de montrer que pour $t \notin \{1, 2\}$, on a : $1 - t2^{1-t} \neq 0$, d'où $a_t = 0$ si $t \notin \{1, 2\}$.
Ainsi, les seuls polynômes solutions sont de la forme $x \mapsto ax^2 + bx$, qui conviennent d'après I.2.

II.C.3. Solutions plusieurs fois dérivables en 0

II.C.3.a La formule de Taylor-Young fournit un développement limité de f en 0 :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}\, x^p + o(x^n).$$

De même, f' admet un développement limité à l'ordre $n - 1$:

$$f'(x) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(f')^{(p)}(0)}{p!}\, x^p + o(x^{n-1}) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{f^{(p+1)}(0)}{p!}\, x^p + o(x^{n-1}).$$

En substituant $x/2$ à x et en utilisant $E(I)$, il vient :

$$f(x) = x f'\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{f^{(p+1)}(0)}{p!\, 2^p} x^{p+1} + o(x^n) = \sum_{p=1}^{n} \frac{f^{(p)}(0)}{(p-1)!\, 2^{p-1}} x^p + o(x^n).$$

Par unicité du développement limité, il vient : $f(0) = 0$ et, pour $p \geq 1$: $\frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \frac{f^{(p)}(0)}{(p-1)!\, 2^{p-1}}$, si bien que $f^{(p)}(0) = 0$ ou $p\, 2^{1-p} = 1$.

II.C.3.b D'après II.C.1.b., les seules solutions réelles de l'équation $p\,2^{1-p} = 1$ sont 1 et 2. Pour $p \geq 3$, on a donc : $f^{(p)}(0) = 0$. Ainsi, en posant $a = f'(0)$ et $b = f''(0)/2$, il vient le développement souhaité à l'ordre n.

II.C.4. Solutions développables en série entière en 0

Une série entière est indéfiniment dérivable sur son domaine ouvert de convergence : d'après II.C.3.a, on déduit que f et toutes les dérivées de f s'annulent en 0 sauf peut-être $f'(0)$ et $f''(0)$. Or on sait que $a_n = f^{(n)}(0)/n!$, d'où $a_n = 0$ sauf si $n \in \{1, 2\}$.
Ainsi, pour $x \in \left]-R, R\right[$, on a : $f(x) = ax + bx^2$. Notons $p(x) = ax + bx^2$ pour x réel quelconque : p est une solution de $E(I)$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour $x \in \left]-2^{k-1}R, 2^{k-1}R\right[$, on ait : $f(x) = p(x)$. (On vient de voir que c'est vrai pour $k = 2$.) Alors, pour $\in \left]-2^{k}R, 2^{k}R\right[$, on a $\frac{x}{2} \in \left]-2^{k-1}R, 2^{k-1}R\right[$, donc $f(x) = xf'(\frac{x}{2}) = xp'(\frac{x}{2}) = p(x)$. Par récurrence, on a $f(x) = p(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \left]-2^{k}R, 2^{k}R\right[$.
Par suite, f et p coïncident sur $\mathbb{R}$, i.e. f est polynômiale sur $\mathbb{R}$.

Erreur (trop) vue *Le fait que f soit développable en série entière au voisinage de* 0 *et que la série ait un rayon de convergence infini* n'entraîne pas *que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Prendre par exemple la fonction $f = \xi$ de la partie IV : $f(x) = 1$ sur $]-1, 1[$, et pourtant f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.*

II.C.5. Solutions exponentielles

La fonction $x \mapsto e^{ax}$ a pour dérivée $x \mapsto ae^{ax}$. L'équation $E(I)$ s'écrit : pour tout $x \in I$, $e^{ax/2} = ax$. Or en prenant la limite lorsque x tend vers 0 (0 est adhérent à I), il vient : $1 = 0$, ce qui est absurde. On peut aussi dire que les développements en série entière de ces deux fonctions (au voisinage d'un point de I, pas nécessairement 0) ne coïncident pas.
Ainsi, aucune fonction de la forme $x \mapsto e^{ax}$ n'est dans $\mathcal{S}(I)$.

II.C.6. Solutions périodiques

Soit f périodique dans $\mathcal{S}(I)$. La fonction f étant continue et périodique, elle est bornée sur I. [En effet, elle est bornée sur une période comme toute fonction continue sur un compact, et cela se prolonge à I par périodicité.] Soit M un majorant de $|f|$. Pour $x > 0$, on a donc : $|f'(x)| = |f(2x)/(2x)| \leq M/(2x)$, d'où $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
Or, si f est périodique de période $T > 0$, il en est de même de f'. Pour $x_0 > 0$ fixé et $n \in \mathbb{N}$, on obtient : $f'(x_0) = f'(x_0 + nT) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $f'(x_0) = 0$. Il en résulte que f' est partout nulle, donc que f est constante (par le théorème des accroissements finis). On a vu que $f(0) = 0$, si bien que f est uniformément nulle.

<u>Variante</u> : si f est périodique de période $T > 0$, alors f' l'est aussi. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, on ait $x + nT > 0$. Or, on a :

$$f'(x) = f'(x + nT) = \frac{f(2x + 2nT)}{2x + 2nT} = \frac{f(2x)}{2nT + 2x},$$

quantité qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On en déduit que f' est la fonction nulle, puis que f est constante, puis que f est nulle.

Partie III

III.A Recherche de solutions particulières

III.A.1. C'est avec du vieux qu'on fait du neuf

On a supposé $0 \notin I$ donc d'après II.B.1., f est de classe C^∞ sur I. Pour $k = 0$, il est clair que $g_0 = f : x \mapsto x^0 f^{(0)}(x)$ est dans $\mathcal{S}(I)$. Soit $k \geq 1$. Notons pour $x \in I$: $g_k(x) = x^k f^{(k)}(x)$. On a donc : $g_k'(x) = kx^{k-1}f^{(k)}(x) + x^k f^{(k+1)}(x)$, d'où en substituant $x/2$ à la place de x :

$$x\, g_k'\left(\frac{x}{2}\right) = k\frac{x^k}{2^{k-1}}f^{(k)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^{k+1}}{2^k}f^{(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right) = x^k\left(\frac{x}{2^{k-1}}f^{(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{k}{2^{k-1}}f^{(k)}\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$

si bien que $g_k(x) = xg_k'(\frac{x}{2})$ pour tout x (en utilisant II.B.1.). Ainsi, $g_k \in \mathcal{S}(I)$.

III.A.2. Si $\mathcal{S}(I)$ est de dimension finie

III.A.2.a Soit $d = \dim \mathcal{S}(I)$. La question précédente montre que la famille $(g_0, g_1, \ldots, g_d$ est formée de $d+1$ vecteurs de $\mathcal{S}(I)$. Elle est donc liée, ce qui prouve l'existence de constantes $a_0, \ldots, a_d$, pas toutes nulles, telles que pour tout $x \in I$ on ait :

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{d} a_k\, x^k f^{(k)}(x) = 0.$$

On ne saurait avoir $a_1 = \cdots = a_d = 0$, car cela forcerait $a_0 = 0$ (vu que $f \neq 0$). Par suite, l'ordre q de l'équation différentielle précédente, i.e. le plus grand indice k tel que $a_k \neq 0$, est donc compris entre 1 et $d = \dim(\mathcal{S}(I))$.

III.A.2.b Par composition, la fonction $y : t \mapsto f(e^t)$ est indéfiniment dérivable. Montrons par récurrence sur $k \geq 1$ que sa dérivée k^{e} est de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y^{(k)}(t) = \sum_{\ell=1}^{k} b_{k,\ell} e^{\ell t} f^{(\ell)}(e^t),$$

où $b_{k,\ell} \in \mathbb{R}$ et $b_{k,k} = 1$. Pour $k = 1$, on a : $y'(t) = e^t f'(e^t)$, d'où la relation avec $b_{1,1} = 1$. Soit $k \geq 2$, on suppose que $y^{(k)}$ est de la forme annoncée. Pour tout réel t, $y^{(k+1)}(t)$ vaut :

$$\sum_{\ell=1}^{k} b_{k,\ell}\left(e^{(\ell+1)t}f^{(\ell+1)}(e^t) + \ell\, e^{\ell t}f^{(\ell)}(e^t)\right) = e^{(k+1)t}f^{(k+1)}(e^t) + \sum_{\ell=1}^{k}(b_{k,\ell+1} + \ell b_{k,\ell})e^{\ell t}f^{(\ell)}(e^t).$$

ce qui clôt la récurrence.

Par une nouvelle récurrence, on en déduit que la fonction $t \mapsto e^{kt} f^{(k)}(t)$ est une combinaison linéaire de $y^{(\ell)}$ ($\ell \leq k$). Pour initialiser, écrire que $e^t f'(e^t) = y'(t)$ et pour l'hérédité, $e^{(k+1)t} f^{(k+1)}(t) = y^{(k+1)}(t) - \sum_{\ell=1}^{k} b_{k,\ell}\, e^{\ell t} f^{(\ell)}(e^t)$.

Si on reporte dans l'équation de III.A.2.a., on trouve une équation en y de la forme :

$$\sum_{k=0}^{q} c_k\, y^{(k)}(t) = 0,$$

avec $c_q = a_q \neq 0$. C'est une équation différentielle à coefficients constants dont y est solution.

III.A.2.c Les solutions de l'équation précédente sont toutes les combinaisons linéaires de fonctions de la forme $t^\nu\, e^{at}$, où a est une racine du polynôme $P = \sum_{k=0}^{q} c_k X^k$ et ν est un entier naturel (strictement inférieur à la multiplicité de a comme racine de P, qu'importe).

Or, dire que y est de la forme $t \mapsto t^\nu e^{at}$ est équivalent à dire que f est de la forme $x \mapsto (\ln x)^\nu x^a$. Par « linéarité », il en résulte que f est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $x \mapsto (\ln x)^\nu x^a$, avec a complexe et ν naturel.

III.A.2.d Toutes les fonctions de la forme $x \mapsto (\ln x)^\nu\, x^a$ (où a est racine de P et ν est strictement inférieur à la multiplicité de a) sont solutions de $(*)$. En effet, f est solution de $(*)$ si et seulement si y est solution de (∇).

Mais on a seulement montré que *si* $f \in \mathcal{S}(I)$, *alors* f satisfait $(*)$, mais pas la réciproque. Donc même sous l'hypothèse que $\dim \mathcal{S}(I)$ est finie, *on ne peut pas conclure*. De plus, cette hypothèse n'est pas vraie, comme en témoigne l'abondance de solutions construites dans la partie V.

III.B Etude des solutions de la forme $x \mapsto (\ln x)^\nu x^a$

III.B.1. Recherche des a, ν convenables

III.B.1.a Dériver $x \mapsto (\ln x)^\nu x^a$, injecter dans $E(I)$, on obtient une égalité valable pour tout $x > 0$. On pose alors $t = \ln x$ et on remplace : comme t décrit $\mathbb{R}$ lorsque x décrit $\mathbb{R}^{+*}$, l'égalité qui en résulte est valable pour *tout* $t \in \mathbb{R}$.
III.B.1.b Diviser par t^ν, faire tendre t vers $+\infty$, utiliser le fait que $\nu \geq 1$ et conclure. Ou, plus simplement, prendre le coefficient de t^ν dans le polynôme nul de la question précédente.
III.B.1.c Pour $\nu \geq 2$, l'évaluation en $t = \ln 2$ donne $(\ln 2)^\nu = 0$ car $2^{a-1} = e^{(a-1)\ln 2} \neq 0$. Pour $\nu = 1$, on a pour tout t : $2^{a-1}t^\nu - at = 0$ et $(t - \ln 2)^{\nu-1} = 1$, d'où $a \ln 2 = 1$ sans rien faire.
III.B.1.d Il est absurde de supposer que $\nu \geq 2$ car cela conduit à l'égalité fausse $(\ln 2)^\nu = 0$. Par suite, on a $\nu = 1$, on obtient $a = 1/\ln 2$, si bien que a est réel et, de notoriété publique, différent de 1 et 2. Vu que l'on a cependant $a2^{1-a} = 1$, on contredit II.C.1.b.
Ainsi, il n'existe pas de fonction de la forme $x \mapsto (\ln x)^\nu x^a$ de $\mathcal{S}(I)$ avec $\nu \geq 1$.

III.B.2. Condition sur a pour que $(x \mapsto x^a) \in \mathcal{S}(I)$

La fonction h appartient à $\mathcal{S}(I)$ si, et seulement si pour tout $x \in I$, on a : $x^a = \frac{a}{2^{a-1}} x^a$. Ceci équivaut à $a = 2^{a-1}$ car I contient un réel non nul.

III.B.3. Fonctions de ce type avec a réel

D'après III.B.2., si $x \mapsto x^a$ est dans $\mathcal{S}(I)$, alors $v(a) = 1$, donc d'après II.C.1.b., on a : $a \in \{1, 2\}$.
On a déjà vu plusieurs fois que $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ étaient bien dans $\mathcal{S}(I)$.

III.B.4. Fonctions de ce type avec a complexe non réel

III.B.4.a Supposons $\omega < 0$. D'après II.A.2., $h \in \mathcal{S}(I)$ si, et seulement si $\overline{h}$ aussi. Or, $\overline{h}(x) = x^{\overline{a}}$ (car ici x est réel), et $\Im \overline{a} = -\omega > 0$.
On travaille donc avec $\overline{h}$ au lieu de h, qui est du même type, avec « un ω strictement positif ».
III.B.4.b Vu que $2^{a-1} = 2^{\alpha-1+i\omega} = 2^{\alpha-1}\, e^{i\omega \ln 2} = 2^{\alpha-1}(\cos(\omega \ln 2) + i \sin(\omega \ln 2))$, on a :

$$\begin{aligned} h \in \mathcal{S}(I) &\iff a = 2^{a-1} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha &=& 2^{\alpha-1} \cos(\omega \ln 2) \\ \omega &=& 2^{\alpha-1} \sin(\omega \ln 2). \end{array} \right. \end{aligned}$$

III.B.4.c Supposons que $h \in \mathcal{S}(I)$, i.e. que $a = 2^{a-1}$. Ecrivons $a = \rho e^{i\phi}$ et $2^{a-1} = 2^{\alpha-1}\, e^{i\omega \ln 2}$, on en déduit que $\rho = 2^{\alpha-1}$ et que $\phi \equiv \omega \ln 2\ [2\pi]$.
Posons alors $\theta = \omega \ln 2$. On a : $\theta > 0$, $\phi \in]0, \pi[$ et $\theta - \phi \in 2\pi\mathbb{Z}$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]2n\pi, (2n+1)\pi[$ tel que $\phi = \theta - 2n\pi$.
De plus, on a : $2^{\rho \cos \theta} = 2^\alpha = 2 \times 2^{\alpha-1} = 2\rho$ et $\rho(\ln 2) \sin \theta = \rho \sin \phi\, \ln 2 = \omega \ln 2 = \theta$.

Inversement, s'il existe n et θ comme dans l'énoncé, on a : $\rho = 2^{\rho \cos \theta - 1} = 2^{\rho \cos \phi - 1} = 2^{\alpha-1}$ et $\theta = \rho(\ln 2) \sin \phi = \omega \ln 2$, si bien que $\alpha = \rho \cos \phi = \rho \cos \theta = 2^{\alpha-1} \cos(\omega \ln 2)$ et $\omega = \rho \sin \phi = \rho \sin \theta = 2^{\alpha-1} \sin(\omega \ln 2)$. D'après 4.a, ceci montre que $a = 2^{a-1}$, i.e. que $h \in \mathcal{S}(I)$.

Remarque *Il y a un peu overdose de notations et de relations, il faut être très précis. Toute rédaction qui procède par équivalences me semble fort hasardeuse ou, au mieux, fort délicate.*

III.B.4.d Supposons les conditions de 4.c remplies. Alors on a : $\rho = \frac{1}{\ln 2} \frac{\theta}{\sin \theta}$, ce qui donne en reportant dans $2^{\rho \cos \theta} = 2\rho$:

$$e^{(\ln 2)\, \frac{1}{\ln 2} \frac{\theta}{\sin \theta}\, \cos \theta} = 2\, \frac{1}{\ln 2}\, \frac{\theta}{\sin \theta}, \qquad \text{ou} \quad (\ln 2)(\sin \theta) e^{\theta \cot \theta} = 2\theta,$$

ou encore $g(\theta) = 0$. On calcule alors :

$$\alpha = \rho \cos \theta = \frac{\theta \cot \theta}{\ln 2} \quad \text{et} \quad \omega = \rho \sin \theta = \frac{\theta}{\ln 2}.$$

Inversement, si $\alpha = \frac{\theta \cot \theta}{\ln 2}$ et $g(\theta) = 0$, alors

$$2^{\alpha-1} = \frac{e^{(\ln 2)\frac{\theta \cot \theta}{\ln 2}}}{2} = \frac{e^{\theta \cot \theta}}{2} = \frac{\theta}{(\sin \theta)(\ln 2)}.$$

Si de plus on a : $\omega = \frac{\theta}{\ln 2}$, alors $\theta = \omega \ln 2$, d'où :

$$2^{\alpha-1} \cos(\omega \ln 2) = \frac{\theta}{(\sin \theta)(\ln 2)} \cos \theta = \frac{\theta \cot \theta}{\ln 2} = \alpha \text{ et } 2^{\alpha-1} \sin(\omega \ln 2) = \frac{\theta}{(\sin \theta)(\ln 2)} \sin \theta = \omega.$$

D'après 4.a, h est dans $\mathcal{S}(I)$.
III.B.4.e Pour $\theta \in]0, \pi/2[$, on a : $\sin \theta/\theta \leq 1$ et $\theta \cot \theta \leq 1$, d'où :

$$\frac{\ln 2}{2} \frac{\sin \theta}{\theta} e^{\theta \cot \theta} \leq \frac{\ln 2}{2} \times 1 \times e^1 < 1.$$

Pour $\theta \in [\pi/2, \pi[$, on a encore $\sin \theta/\theta \leq 1$ car $0 \leq \sin \theta \leq 1 \leq \theta$ et $\theta \cot \theta \leq 0 \leq 1$.
Ainsi, pour $\theta \in]0, \pi[$, $g(\theta) > 0$, donc l'équation $g(\theta) = 0$ n'a pas de solution dans $]0, \pi[$.
III.B.4.f On calcule la dérivée de g :

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= 2 - \ln 2 \cos \theta e^{\theta \cot \theta} - \ln 2 \sin \theta \cot \theta e^{\theta \cot \theta} - (\ln 2)(\sin \theta)\theta \frac{-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} e^{\theta \cot \theta} \\ &= 2 + \ln 2 \, \frac{\theta - 2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} \, e^{\theta \cot \theta}. \end{aligned}$$

Par suite, $g'(\theta) > 0$ si $\theta \in]2n\pi, (2n+1)\pi[$ $(n \geq 1)$ puisque $\theta \geq 2 \geq 2 \sin \theta \cos \theta$ et $\sin \theta > 0$.
Il en résulte que g est strictement croissante sur $]2n\pi, (2n+1)\pi[$, et bien sûr elle y est continue.
On conclut puisque $\lim_{\theta \to 2n\pi} g(\theta) = -\infty$ (en effet, dans l'expression $\sin \theta e^{\frac{\theta \cos \theta}{\sin \theta}}$, c'est « le $\sin \theta$ de l'exponentielle qui l'emporte »), et que $\lim_{\theta \to 2n\pi} g(\theta) = +\infty$ (même raison).
III.B.4.g Supposons que l'on ait $\alpha_m = \alpha_n$ pour $m, n \in \mathbb{N}^*$. Cela signifie que $\theta_m \cot \theta_m = \theta_n \cot \theta_n$ (§). En utilisant $g(\theta_m) = 0 = g(\theta_n)$, on en déduit que $\frac{\sin \theta_m}{\theta_m} = \frac{\sin \theta_n}{\theta_n}$ (§§). En reportant dans (§), il vient : $\cos \theta_m = \cos \theta_n$. Mais comme on sait que $\theta_m - 2m\pi$ et $\theta_n - 2n\pi$ appartiennent à $]0, \pi[$ et que cos est injective sur $]0, \pi[$, on en déduit que $\theta_m - 2m\pi = \theta_n - 2n\pi$, puis que $\sin \theta_m = \sin \theta_n$, et en reportant dans (§§) : $\theta_m = \theta_n$, soit $m = n$.
Ceci montre que l'application $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $n \mapsto \alpha_n$ est injective.

Dans l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur I, auquel les fonctions h_n appartiennent toutes en tant que solutions de $E(I)$, l'application $D : h \mapsto (x \mapsto xh'(x))$ est un endomorphisme. Or, h_n est un vecteur propre de D associé à la valeur propre a_n. Comme les réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont tous distincts, et que des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants, on en déduit que la famille $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est libre.

Il en résulte que l'espace $\mathcal{S}(I)$ est de dimension infinie !

Supposons que $\mathcal{S}_\mathbb{R}(I)$ soit de dimension finie (sur $\mathbb{R}$), et soit $\mathcal{B} = (g_1, \ldots, g_d)$ une base de $\mathcal{S}_\mathbb{R}(I)$. Pour $f \in \mathcal{S}(I)$, on écrit $f = \Re \circ f + i \Im \circ f$, et $\Re \circ f$ et $\Im \circ f$ sont des combinaisons linéaires (à coefficients réels) de $\mathcal{B}$, d'où f est une combinaison linéaire (à coefficients complexes) de $\mathcal{B}$. Ainsi, $\mathcal{S}(I)$ est de dimension finie (sur $\mathbb{C}$), contradiction.

Remarque *À titre d'exercice, montrer que la famille* $(x \mapsto x^{\alpha_n} \cos(\omega_n x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est libre en utilisant uniquement le fait que les* α_n *sont tous distincts. Ceci permet de conclure que* $\dim \mathcal{S}_\mathbb{R}(I) = +\infty$ *sans passer par ce « truc » espace sur* $\mathbb{R}$*/espace sur* $\mathbb{C}$.

III.B.4.h La résolution approchée donne : $7.454 < \theta_1 < 7.4541$, puis $4.5453 < \alpha_1 < 4.5454$ et $10.7539 < \omega_1 < 10.754$. J'abdique pour la courbe. Ça monte, quoi...

Partie IV

IV.A Deux erreurs

– Dans la **réponse 2**, on pose $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, puisque $\psi(t) = 0$ si et seulement si $t \leq 0$, on a, pour $x \in \mathbb{R}^n$: $\psi(x) = 0$ si et seulement si $\|x\| \geq 1$ au lieu de $\|x\| > 1$.

– Il y a un problème dans la **réponse 3**. On a, pour $x \in \mathbb{R}$: $\varphi'(x) = -2x\psi'(1-x^2)$ et $\varphi''(x) = -2\psi'(1-x^2) + 4x^2\psi''(1-x^2)$. Pour $x = 0$, on trouve : $\varphi''(0) = -2\psi'(1) < 0$.
Maintenant, soit $x \in]a, b[$. On a : $s''(x) = \frac{1}{\varphi(0)(b-a)^2}\varphi''(\frac{x-b}{b-a})$, donc $\lim_{x\to b^-} s''(x) = \frac{1}{\varphi(0)(b-a)^2}\varphi''(0) < 0$. D'un autre côté, on a : $\lim_{x\to b^+} s''(x) = 0$. La fonction s est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas $\mathcal{C}^2$. Même problème en c.
Ainsi, l'élève a fait attention à bien recoller en a et d, mais sa fonction s n'est pas $\mathcal{C}^2$ en b et c. Cependant, elle est $\mathcal{C}^1$, si bien que le dessin est correct...

IV.B Version corrigée ?

IV.B.1. Mise en place de la récurrence et application

Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par : $P_0 = 1$ et, pour $k \geq 0$, $P_{k+1} = X^2(P_k - P_k')$. On a $\deg P_0 = 0$ et si $\deg P_k = 2k$, alors $\deg P_{k+1} = \deg(X^2 P_k) = 2 + \deg P_k = 2(k+1)$ (car $\deg P_k > \deg P_k'$). Ainsi, pour tout k, $\deg P_k = 2k$.
Si $t > 0$, on a : $\psi(t) = P_0(\frac{1}{t})\, e^{-1/t}$. Supposons que ψ soit k fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $t > 0$, on ait $\psi^{(k)}(t) = P_k(\frac{1}{t})\, e^{-1/t}$. On peut alors dériver une fois de plus pour obtenir :

$$(\spadesuit) \qquad \forall t > 0, \quad \psi^{(k+1)}(t) = -\frac{1}{t^2}P_k'(\frac{1}{t}) + \frac{1}{t^2}P_k(\frac{1}{t})\, e^{-1/t} = P_{k+1}(\frac{1}{t})\, e^{-1/t}.$$

Par récurrence, ψ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et la relation $(\spadesuit)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, ψ est aussi $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que ψ soit $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et que $\psi^{(k)}(0) = 0$. (C'est vrai si $k = 0$.) Par croissance comparée, on a : $\lim_{t\to 0^+} \psi^{(k+1)}(t) = 0$ et évidemment, $\lim_{t\to 0^-} \psi^{(k+1)}(t) = 0$.
D'après les théorème des accroissements finis, pour $t \neq 0$, il existe ξ_t compris strictement entre 0 et t tel que $\psi^{(k)}(t)/t = \psi^{(k+1)}(\xi_t)$. Bien sûr, ξ_t n'est peut-être pas unique, mais on a cependant : $\lim_{t\to 0} \psi^{(k+1)}(\xi_t) = 0$, d'après ce qui précède. Par suite, $\psi^{(k)}$ est dérivable en 0 et $\psi^{(k+1)}(0) = 0$. Ceci entraîne aussi que $\psi^{(k+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc ψ est $\mathcal{C}^{k+1}$.
On conclut par récurrence que ψ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

IV.B.2. Norme et support

Dans la réponse 2, on a posé[1] : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
L'application $\|.\|^2 : x \mapsto \|x\|^2$ étant polynômiale en les coordonnées de x, elle est donc $\mathcal{C}^\infty$, c'est-à-dire qu'elle possède des dérivées partielles continues à tout ordre. (D'ailleurs, d'autres normes auraient posé un problème, comme la norme $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n(|x_i|)$, par exemple.) Par composition des applications $\|.\|^2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, toutes deux indéfiniment différentiables, φ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On a vu que $\varphi(x) = 1$ si $\|x\| = 1$. L'ensemble des points où φ ne s'annule pas est la boule unité ouverte, donc le support de φ est la boule unité fermée.

IV.B.3. Une vraie fonction plateau

IV.B.3.a Notons que $x(1-x) > 0$ si et seulement si $x \in]0, 1[$. On en déduit que $\delta(x) = \psi(x(1-x))$, et donc δ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et d'un polynôme. De plus, $\delta(x)$ est non nul si et seulement si $x \in]0, 1[$, donc le support de δ est $\overline{]0, 1[} = [0, 1]$.
IV.B.3.b Faut-il prouver ce résultat avec ε, α ?
IV.B.3.c La fonction Δ est une primitive de $\frac{1}{\eta}\delta$, qui est $\mathcal{C}^\infty$, donc Δ est elle-même $\mathcal{C}^\infty$. Vu que δ est nulle sur $]-\infty, 0]$, il en est de même de Δ. Puisque $\delta > 0$ sur $]0, 1[$, Δ est strictement croissante sur $[0, 1]$. Enfin, pour $x \geq 1$: $\Delta(x) = \frac{1}{\eta}\int_0^1 \delta(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\eta}\int_1^x 0\,\mathrm{d}t = 1$.
IV.B.3.d Routine – distinguer cinq cas selon la valeur de x, c'est facile.

1. Imprécision, ou plutôt sous-entendu intolérable aux yeux de celui qui a fait le sujet !