2e épreuve 2005 : 1ère partie

Ceci n'est pas un corrigé

Février 2007

Notations

Soit $a > 0$, $k > 0$, $I = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ et

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} x(t) = a + k\cos t, \\ y(t) = a\tan t + k\sin t. \end{cases}$$

Notations

Soit $a > 0$, $k > 0$, $I = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ et

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} x(t) = a + k\cos t, \\ y(t) = a\tan t + k\sin t. \end{cases}$$

Symétries

Notations

Soit $a > 0$, $k > 0$, $I = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ et

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} x(t) = a + k\cos t, \\ y(t) = a\tan t + k\sin t. \end{cases}$$

Symétries

Attention ! I n'est pas stable par $t \mapsto -t$: ça n'a pas de sens de dire que x et y sont impaires.

On a :

$$\forall t \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t), \end{cases}$$

et

$$\forall t \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[, \quad \begin{cases} x(2\pi - t) = x(t) \\ y(2\pi - t) = -y(t) \end{cases}$$

La courbe est symétrique par rapport à (Oy).

Variations si $a = 1$, $k = 2$

Les fonctions x et y sont dérivables sur I et

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} x'(t) = -2\sin t, \\ y'(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t} + 2\cos t = \dfrac{1 + 2\cos^3 t}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

Variations si $a = 1$, $k = 2$

Les fonctions x et y sont dérivables sur I et

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} x'(t) = -2\sin t, \\ y'(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t} + 2\cos t = \dfrac{1 + 2\cos^3 t}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

- x' change de signe en 0 et π ;
- y' s'annule en $\alpha = \arccos(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}})$ et en $2\pi - \alpha$ et change de signe.
- en particulier, pas de point stationnaire !

Tableau pour $a = 1$, $k = 2$, $\alpha = \arccos -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\alpha' = 2\pi - \alpha$

t	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$		α		π		α'		$\frac{3\pi}{2}$
sg $x'(t)$		$+$		$-$			$-$		$-$		$+$		$+$	
var x	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	1	$\searrow$			-1			$\nearrow$	1
var y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$?$	$\searrow$	0	$\searrow$	$?$	$\nearrow$	$+\infty$
sg $y'(t)$		$+$		$+$			$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

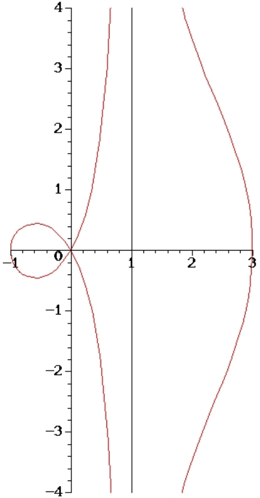
Asymptote : $x = 1$

Lorsque t tend vers le bord de I, $x(t) \longrightarrow 1$ et $y(t) \longrightarrow \infty$.

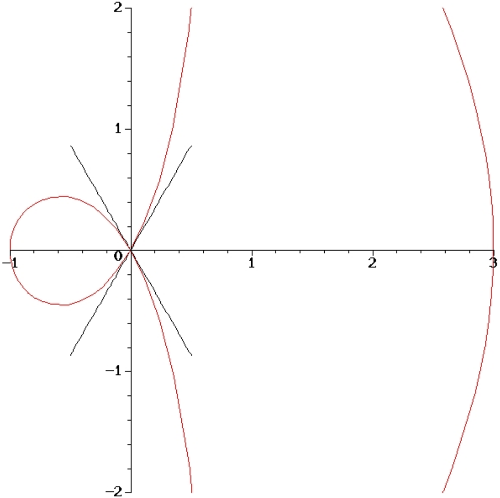
Tangentes au point double

En $t = 2\pi/3$ et $t = 4\pi/3$, on est en O. Tangentes : $\frac{y'}{x'} = \pm\sqrt{3}$.

Graphe de Φ $(a = 1,\ k = 2)$



Graphe de Φ $(a = 1,\ k = 2)$



1.2 Allure dans le cas général

Les fonctions x et y sont dérivables sur I et

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} x'(t) = -k \sin t, \\ y'(t) = \dfrac{a}{\cos^2 t} + k \cos t = \dfrac{a + k\cos^3 t}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

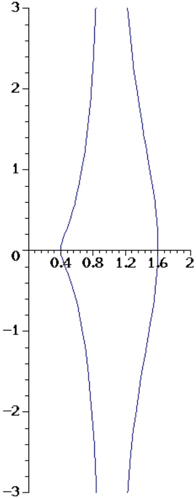
- Si $k < a$, y est strictement monotone sur chaque intervalle ;
- si $k = a$, y' s'annule en $\arccos(-\sqrt[3]{\frac{a}{k}}) = \pi$ sans changer de signe ;
- si $k > a$, y' s'annule en $\alpha = \arccos(-\sqrt[3]{\frac{a}{k}})$ et en $2\pi - \alpha$ et change de signe.

D'où facilement un tableau de variations et l'allure.

Cas $k > a$

Analogue à celui de **1.1**.

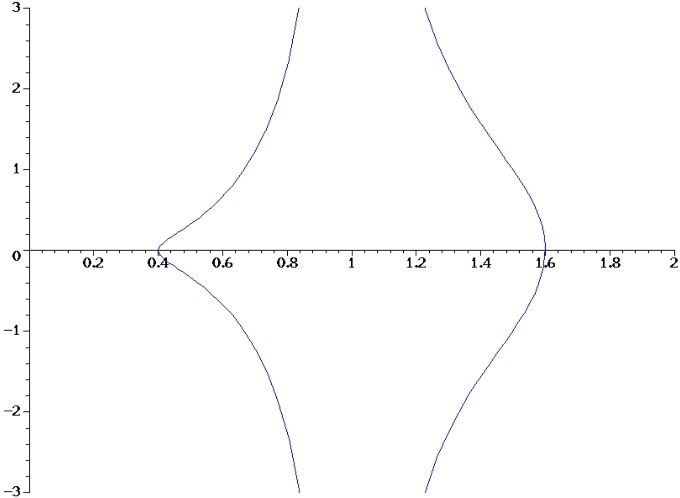
Cas $k < a$



Cas $k > a$

Analogue à celui de **1.1**.

Cas $k < a$

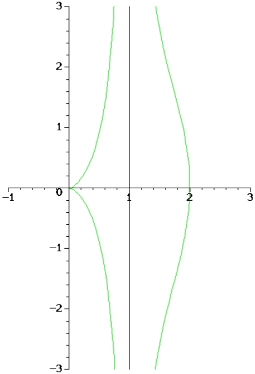


Cas $k = a$

Point stationnaire pour $t = \pi$. Posant $t = \pi + h$, on a :

$$x(t) = 1 - \cos h = \frac{h^2}{2} + o(h^2), \quad y(t) = -\sin h + \tan h = \frac{h^3}{2} + o(h^3).$$

D'où $\lim_{t \to \pi} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$: deux demi-tangentes, point de rebroussement.

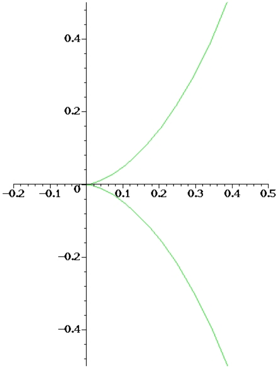


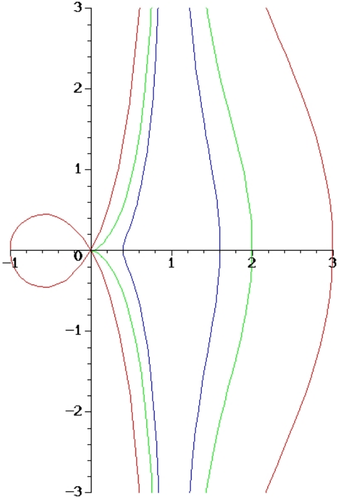
Cas $k = a$

Point stationnaire pour $t = \pi$. Posant $t = \pi + h$, on a :

$$x(t) = 1 - \cos h = \frac{h^2}{2} + o(h^2), \quad y(t) = -\sin h + \tan h = \frac{h^3}{2} + o(h^3).$$

D'où $\lim_{t \to \pi} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$: deux demi-tangentes, point de rebroussement.





3
2
1
0
−1
1
2
3
−1
−2
−3

1.3 Equation polynômiale pour Φ

$$
\begin{aligned}
M(x,y) \in \Phi \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists t \in I, \ \begin{cases} x = a + k\cos t \\ y = a\tan t + k \sin t \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists t \in I, \ \begin{cases} x = a + k\cos t \\ \\ \left(a + k\cos t\right) \ \sin t = y \ \cos t \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists t \in I, \ \begin{cases} \cos t = \dfrac{x-a}{k} \\ \\ x \ \sin t = y \ \dfrac{x-a}{k} \end{cases}
\end{aligned}
$$

1.3 Equation polynômiale pour Φ

$$M(x,y) \in \Phi \iff \exists t \in I, \left\{ \begin{array}{l} x = a + k\cos t \\ y = a\tan t + k\sin t \end{array} \right.$$

$$\iff \exists t \in I, \left\{ \begin{array}{l} x = a + k\cos t \\ \\ (a + k\cos t)\ \sin t = y\ \cos t \end{array} \right.$$

$$\iff \exists t \in I, \left\{ \begin{array}{l} \cos t = \dfrac{x-a}{k} \\ \\ x\ \sin t = y\ \dfrac{x-a}{k} \end{array} \right.$$

Attention ! On ne peut pas diviser par x lorsque $x = 0$...

1. Si $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \Phi \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists t \in I, \begin{cases} \cos t = \dfrac{x-a}{k} \\[2ex] \sin t = y\,\dfrac{x-a}{kx} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{x-a}{k}\right)^2 + \left(y\frac{x-a}{kx}\right)^2 = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x^2+y^2)(x-a)^2 = k^2x^2. \end{aligned}$$

1. Si $x \neq 0$, on a :

$$M(x,y) \in \Phi \iff \exists t \in I, \begin{cases} \cos t = \dfrac{x-a}{k} \\ \sin t = y\,\dfrac{x-a}{kx} \end{cases}$$

$$\iff \left(\frac{x-a}{k}\right)^2 + \left(y\frac{x-a}{kx}\right)^2 = 1$$

$$\iff (x^2+y^2)(x-a)^2 = k^2x^2.$$

2. Si $x = 0$, on a :

$$M(0,y) \in \Phi \iff \exists t \in I, \begin{cases} \cos t = \dfrac{-a}{k} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff y = 0 \text{ et } a \leq k.$$

On pose, pour $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = (x^2+y^2)(x-a)^2 - k^2x^2.$$

Conclusion :

- si $a \leq k$, $f(x,y) = 0$ est une équation de Φ ;
- si $a > k$, $f(x,y) = 0$ est une équation de $\Phi \cup \{O\}$.

Version "inspirée" : pour $t \in I$, on a :

$$\begin{cases} x(t) = a + k\cos t = \left(\dfrac{a}{\cos t} + k\right)\cos t \\ y(t) = \left(\dfrac{a}{\cos t} + k\right)\sin t = \left(\dfrac{a}{\cos t} + k\right)\sin t \end{cases}$$

Par suite, t est l'angle polaire de $\overrightarrow{OM}$, et on a une paramétrisation de Φ :

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} + k.$$

Autre version : Soit $\rho \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$, et $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.
Alors, en évacuant le cas $\rho = 0$:

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in \Phi &\iff (x^2+y^2)(x-a)^2 = k^2x^2 \\
&\iff \rho^2(\rho\cos\theta - a)^2 = k^2\rho^2\cos^2\theta \\
&\overset{\rho\neq 0}{\iff} (\rho\cos\theta - a)^2 = k^2\cos^2\theta \\
&\iff \rho\cos\theta - a = \pm k\cos\theta
\end{aligned}$$

Autre version : Soit $\rho \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$, et $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.
Alors, en évacuant le cas $\rho = 0$:

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in \Phi &\iff (x^2+y^2)(x-a)^2 = k^2x^2 \\
&\iff \rho^2(\rho\cos\theta - a)^2 = k^2\rho^2\cos^2\theta \\
&\overset{\rho\neq 0}{\iff} (\rho\cos\theta - a)^2 = k^2\cos^2\theta \\
&\iff \rho\cos\theta - a = \pm k\cos\theta
\end{aligned}$$

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, posons

$$g_1(\theta) = \frac{a}{\cos\theta} + k, \quad g_2(\theta) = \frac{a}{\cos\theta} - k.$$

Alors : $g_1(\theta) = -g_2(\theta+\pi)$

Autre version : Soit $\rho \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$, et $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$.
Alors, en évacuant le cas $\rho = 0$:

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \Phi &\iff (x^2+y^2)(x-a)^2 = k^2x^2 \\ &\iff \rho^2(\rho\cos\theta - a)^2 = k^2\rho^2\cos^2\theta \\ &\overset{\rho\neq 0}{\iff} (\rho\cos\theta - a)^2 = k^2\cos^2\theta \\ &\iff \rho\cos\theta - a = \pm k\cos\theta \end{aligned}$$

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, posons

$$g_1(\theta) = \frac{a}{\cos\theta} + k, \quad g_2(\theta) = \frac{a}{\cos\theta} - k.$$

Alors : $g_1(\theta) = -g_2(\theta+\pi)$: g_1 et g_2 définissent la même courbe !

Rappel :

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} x'(t) = -k \sin t, \\ y'(t) = \dfrac{a + k\cos^3 t}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

Point stationnaire en $t \in I$ lorsque

$$\begin{cases} 0 = -k \sin t \\ 0 = \dfrac{a + k\cos^3 t}{\cos^2 t} \end{cases} \iff \begin{cases} t \equiv 0 \ [\pi], \\ k \pm a = 0. \end{cases}$$

D'où : un seul point singulier pour $k = a$ et $t = 0$.

1.5 Points singuliers de Φ

Rappel :

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} x'(t) = -k \sin t, \\ y'(t) = \dfrac{a + k\cos^3 t}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

Point stationnaire en $t \in I$ lorsque

$$\begin{cases} 0 = -k \sin t \\ 0 = \dfrac{a + k\cos^3 t}{\cos^2 t} \end{cases} \iff \begin{cases} t \equiv 0\ [\pi], \\ k \pm a = 0. \end{cases}$$

D'où : un seul point singulier pour $k = a$ et $t = 0$.

Vecteur normal en un point régulier

$$\begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a + k\cos^3 t}{\cos^2 t} \\ k \sin t \end{pmatrix}.$$

1.6 Intersection de la normale en M et $y = a \tan t$

1. Hypothèse : $M \notin (Ox)$
   Rappel : $y(t) = x(t) \tan t$ donc
   $$y(t) = 0 \implies x(t) = 0 \text{ ou } \sin t = 0.$$

1.6 Intersection de la normale en M et $y = a\tan t$

1. Hypothèse : $M \notin (Ox)$ donc $\sin t \neq 0$.

1.6 Intersection de la normale en M et $y = a\tan t$

1. Hypothèse : $M \notin (Ox)$ donc $\sin t \neq 0$.
2. Equation de la normale à Φ en M :

$$\begin{vmatrix} \frac{a+k\cos^3 t}{\cos^2 t} & x-a-k\cos t \\ k\sin t & y-a\tan t-k\sin t \end{vmatrix} = 0.$$

3. Intersection avec $y = a\tan t$:

$$\begin{vmatrix} \frac{a+k\cos^3 t}{\cos^2 t} & x-a-k\cos t \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$x = a + k\cos t - \frac{a+k\cos^3 t}{\cos^2 t} = -a\tan^2 t.$$

1. Hypothèse : $M \notin (Ox)$ donc $\sin t \neq 0$.
2. Equation de la normale à Φ en M :

$$\begin{vmatrix} \frac{a+k\cos^3 t}{\cos^2 t} & x - a - k\cos t \\ k \sin t & y - a\tan t - k \sin t \end{vmatrix} = 0.$$

3. Intersection avec $y = a \tan t$:

$$\begin{vmatrix} \frac{a+k\cos^3 t}{\cos^2 t} & x - a - k\cos t \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

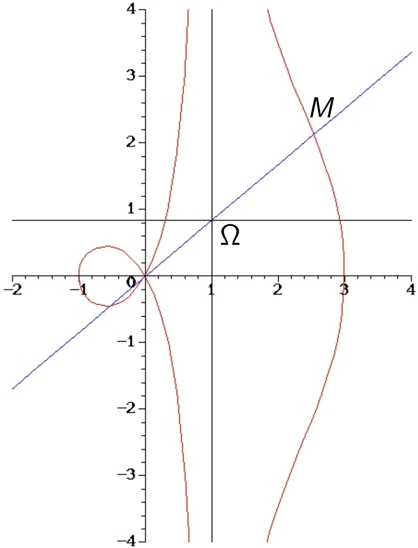
c'est-à-dire :

$$x = a + k\cos t - \frac{a + k\cos^3 t}{\cos^2 t} = -a\tan^2 t.$$

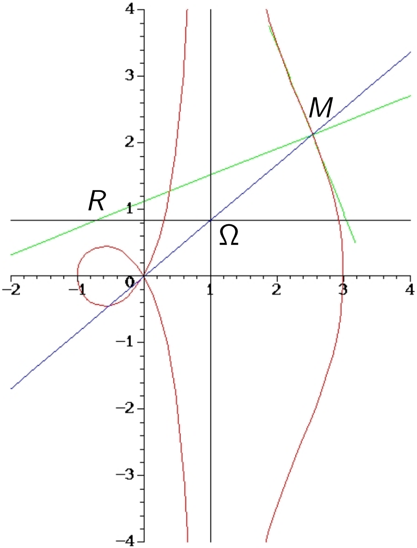
Conclusion

$$R \begin{pmatrix} -a\tan^2 t \\ a \tan t \end{pmatrix}, \quad \Omega \begin{pmatrix} a \\ a\tan t \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{O\Omega} = 0.$$

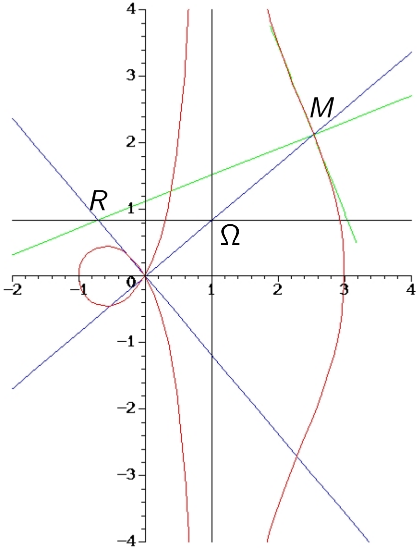
Version graphique : orthogonalité des deux droites bleues



Version graphique : orthogonalité des deux droites bleues



Version graphique : orthogonalité des deux droites bleues



Version graphique : orthogonalité des deux droites bleues