2ème épreuve 2005 : 3ème partie

Ceci n'est pas un corrigé

Février 2007

On note P le point courant de Γ :

$$P : \begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases} \quad ; \quad \Delta : x = a.$$

On suppose $\alpha(t) \neq 0$, car sinon $(OM) \cap \Delta = \emptyset$. Alors

$$\Omega \begin{pmatrix} a \\ \omega(t) \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{vmatrix} a & \alpha(t) \\ \omega(t) & \beta(t) \end{vmatrix} = 0, \text{ i.e. } \omega(t) = a\,\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}.$$

Puis $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{OP}$, d'où :

$$M(t) : \begin{cases} x = \alpha(t) + a \\ y = \beta(t) + a\,\dfrac{\beta(t)}{\alpha(t)}. \end{cases}$$

3.1 Transformée de Descartes des droites

1. Une **droite verticale** a un paramétrage de la forme

$$P : \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = t \end{array} \right. \qquad \text{avec } \alpha \neq 0 \text{ et } t \neq 0.$$

Alors :

$$M(t) \begin{pmatrix} \alpha + a \\ \\ t + a\,\dfrac{t}{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + a \\ \\ \dfrac{\alpha + a}{\alpha}\, t. \end{pmatrix}$$

Ainsi,

- M décrit une droite (si $\alpha + a \neq 0$)
- ou reste fixe en O (si $\alpha + a = 0$).

2. Une **droite non verticale** a un paramétrage de la forme

$$P : \begin{cases} x = t \\ y = ut + v \end{cases} \qquad \text{avec } (u, v) \neq (0, 0).$$

Alors, pour $t \neq 0$:

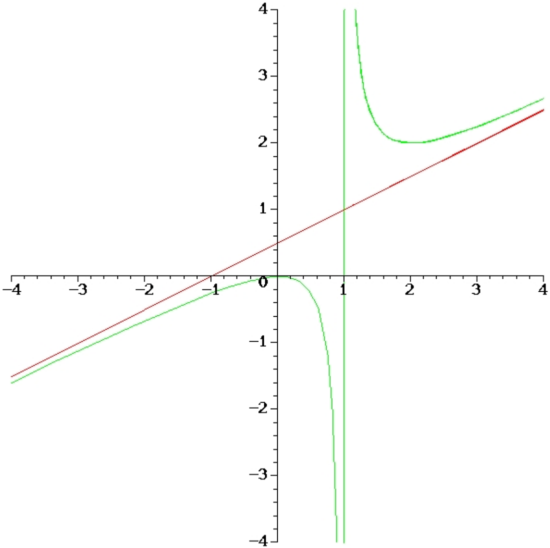
$$M(t) : \begin{cases} X = t + a \\ Y = \dfrac{ut + v}{t}(a + t). \end{cases}$$

On a donc :

$$(X - a)Y = (u(X - a) + v)X = uX^2 + (-au + v)X.$$

Forme quadratique $uX^2 - XY$: $\begin{pmatrix} u & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$: hyperbole.

3.1 TD d'une droite non verticale



Paramétrage de la parabole :

$$P : \begin{cases} x = t \\ y = ct^2 \end{cases} \qquad \text{avec } t \neq 0,\ \ c > 0(\text{fixé}).$$

Transformée de Descartes :

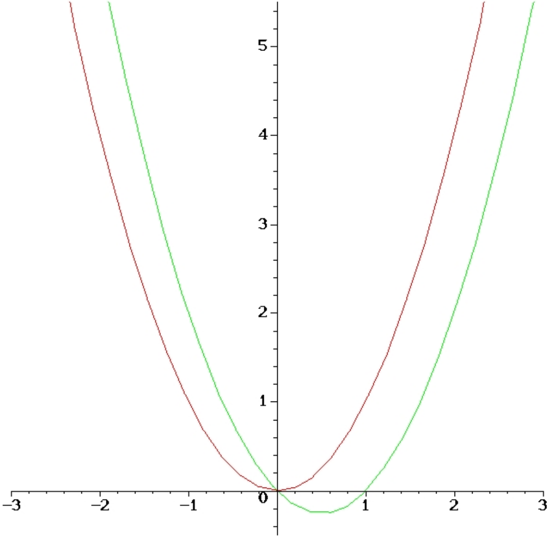
$$M : \begin{cases} X = t + a \\ Y = ct(t + a) \end{cases}$$

Equation de l'image :

$$Y = c(X - a)X = c\left(X - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{ca^2}{4}.$$

M décrit une parabole translatée de $y = cx^2$, privée de $A(a, 0)$.

3.1 TD d'une droite non verticale



3.4 Transformée de Descartes d'une parabole : **2V**

Work it out, man!

3.5 Transformée de Descartes d'une parabole "verticale"

Paramétrage de la parabole Γ ($c \neq 0$, $b, d \in \mathbb{R}$ fixés) :

$$P : \begin{cases} x = t \\ y = c(t-b)^2 + d \end{cases} \qquad \text{avec } t \neq 0.$$

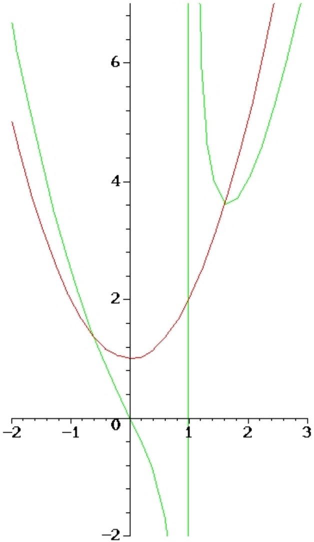
Transformée de Descartes :

$$M : \begin{cases} x = t + a \\ y = \frac{c(t-b)^2+d}{t}(a+t) \end{cases} \iff \begin{cases} t = x - a \\ y(x-a) = \left(c(x-a-b)^2 + d\right) x, \end{cases}$$

et $t \neq 0$ si et seulement si $x \neq a$.

Ainsi, la TD de Γ est le graphe d'une fonction.

3.5 Transformée de Descartes d'une parabole "verticale"



3.6 Parabole asymptote à C

Il est commode de revenir à $t = x - a$:

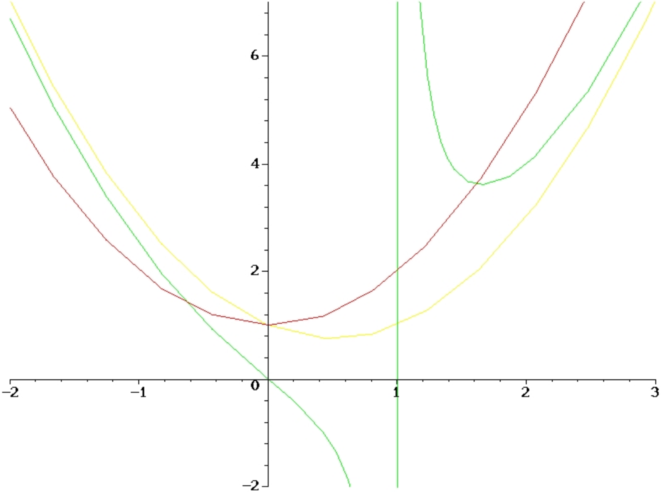
$$y = \frac{t+a}{t}\left(c(t-b)^2 + d\right) = \left(1 + \frac{a}{t}\right)\left(ct^2 - 2bct + cb^2 + d\right),$$

$$y = ct^2 + (a-2b)c\ t + cb^2 + d - 2abc + \frac{a(cb^2+d)}{t},$$

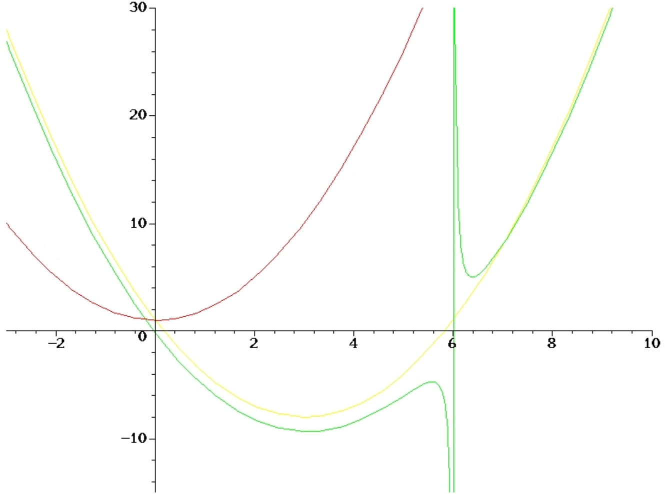
$$y = \underbrace{c(x-a)^2 + (a-2b)c(x-a) + cb^2 + d - 2abc}_{\phi(x)} + \frac{a(cb^2+d)}{x-a}.$$

D'où l'existence d'une parabole asymptote $y = \phi(x)$. Sa position relative par rapport à C est déterminée par le signe de $a(cb^2+d)$.

$$b = 0, \; c = 1, \; d = 1, \; a = 1$$



$$b = 0, \ c = 1, \ d = 1, \ a = 6$$



Si on prend

$$\Gamma : \begin{cases} x = k\cos t \\ y = k\sin t, \end{cases}$$

la transformée de Descartes est :

$$C : \begin{cases} x = a + k\cos t \\ y = a\tan t + k\sin t \end{cases}$$

Sapristi ! N'aurions-nous pas rencontré cette courbe en **1.1** ?