2ème épreuve 2005 (4ème partie)

Ceci n'est pas un corrigé

Février 2007

4.1 Paramétrisation polaire d'un cercle

$\Gamma =$ cercle de centre $B(-a/2, 0)$ contenant O.
Soit $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La droite $y = x \tan t$ (d'angle polaire t) coupe Γ en O et P de coordonnées polaires (ρ, t).
Inversement, tout point de $\Gamma \setminus \{O\}$ est de cette forme pour un unique t.

Γ = cercle de centre $B(-a/2, 0)$ contenant O.
Soit $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La droite $y = x \tan t$ (d'angle polaire t) coupe Γ en O et P de coordonnées polaires (ρ, t).
Inversement, tout point de $\Gamma \setminus \{O\}$ est de cette forme pour un unique t.

Relations métriques dans le triangle OBP rectangle en P :

$$|\rho| = a \cos t \quad (\cos t > 0).$$

Bien sûr, $\rho < 0$ car l'abscisse de P est négative. D'où :

$$\Gamma \setminus \{O\} \ : \ \rho = -a \cos t \quad \text{où } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

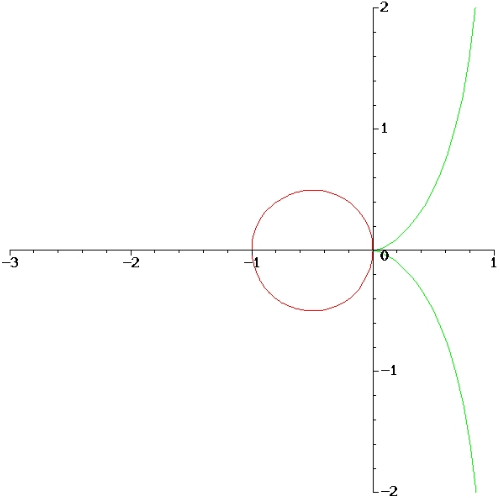
Paramétrage de Γ issu de l'équation polaire précédente :

$$\Gamma : \begin{cases} x = \rho \cos t = -a \cos^2 t \\ y = \rho \sin t = -a \sin t \cos t, \end{cases}$$

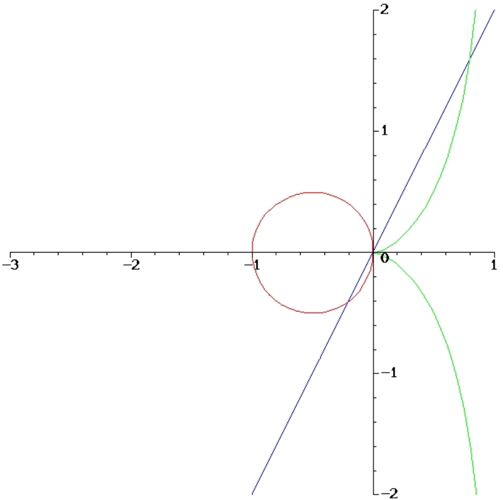
la transformée de Descartes est :

$$C : \begin{cases} x = a(1 - \cos^2 t) = a \sin^2 t \\ y = a \tan t (1 - a \cos^2 t) = a \tan t \sin^2 t. \end{cases}$$

4.1 TD du cercle Γ



4.1 TD du cercle Γ



Idée

Si la paramétrisation proposée avec m convient, on compare facilement les deux paramétrisations ($t \neq 0$) :

$$\tan t = \frac{y}{x} = m.$$

On fait le changement de variable (bijectif, $\mathcal{C}^1$ et tout !) :

$$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad t \longmapsto m = \tan t.$$

Alors, pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$:

$$x = a\frac{\sin^2 t}{\cos^2 + \sin^2 t} = a\,\frac{m^2}{1+m^2}, \quad y = x \tan t = a\,\frac{m^3}{1+m^3}.$$

4.3 L'invention de la parabole

$$\mathcal{P}: \; y^2 = -4ax, \quad M \in C \setminus \{O\}, \quad \mathcal{P} \cap (OM) = \{O, M_1\}.$$

Soit $m \in \mathbb{R}$ le paramètre de M : équation de (OM) : $y = mx$.
Si $M_1(x, y)$, avec $M_1 \neq O$, on a donc :

$$\begin{cases} y = mx \\ y^2 = -4ax \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{4a}{m^2} \\ y = -\frac{4a}{m}. \end{cases}$$

D'où l'existence et l'unicité de M_1 ; de plus :

$$(\overrightarrow{OM_1} | \overrightarrow{OM}) = -\frac{4a^2}{1+m^2} - \frac{4a^2m^2}{1+m^2} = -4a^2.$$

$$\mathcal{P}: \ y^2 = -4ax, \quad M \in C \setminus \{O\}, \quad \mathcal{P} \cap (OM) = \{O, M_1\}.$$

Soit $m \in \mathbb{R}$ le paramètre de M : équation de (OM) : $y = mx$.
Si $M_1(x, y)$, avec $M_1 \neq O$, on a donc :

$$\begin{cases} y = mx \\ y^2 = -4ax \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{4a}{m^2} \\ y = -\frac{4a}{m}. \end{cases}$$

D'où l'existence et l'unicité de M_1 ; de plus :

$$(\overrightarrow{OM_1} | \overrightarrow{OM}) = -\frac{4a^2}{1+m^2} - \frac{4a^2m^2}{1+m^2} = -4a^2.$$

Sens :

C est l'image de $\mathcal{P}$ par l'inversion de centre O et de rapport $-4a^2$.

4.2 $\mathcal{P}$ comme anti-podaire de C

Soit $M_2(x, y) \in \mathcal{P}$, i.e. $y^2 = -4ax$. Tangente à $\mathcal{P}$ en M_2 :

$$2y(Y - y) = -4a(X - x), \quad \text{soit } 2yY = -4a(X + x).$$

4.2 $\mathcal{P}$ comme anti-podaire de C

Soit $M_2(x, y) \in \mathcal{P}$, i.e. $y^2 = -4ax$. Tangente à $\mathcal{P}$ en M_2 :

$$2y(Y - y) = -4a(X - x), \quad \text{soit } 2yY = -4a(X + x).$$

CNS pour que la tangente soit perpendiculaire à (OM) : $Y = mX$:
(NB : $M \notin (Ox)$ donc on peut supposer $y \neq 0$.)

$$\frac{-4a}{2y} m = -1, \quad \text{i.e. } y = 2am.$$

Soit $M_2(x,y) \in \mathcal{P}$, i.e. $y^2 = -4ax$. Tangente à $\mathcal{P}$ en M_2 :

$$2y(Y-y) = -4a(X-x), \quad \text{soit } 2yY = -4a(X+x).$$

CNS pour que la tangente soit perpendiculaire à (OM) : $Y = mX$:
(NB : $M \notin (Ox)$ donc on peut supposer $y \neq 0$.)

$$\frac{-4a}{2y}\, m = -1, \quad \text{i.e. } y = 2am.$$

Alors la tangente coupe C en M car :

$$2y\left(\frac{am^3}{1+m^2}\right) = -4a\left(\frac{am^2}{1+m^2} + x\right).$$

(Remplacer $y = 2am$ et $x = (2am)^2/(-4a)$ et vérifier !)

4.2 $\mathcal{P}$ comme anti-podaire de C

Soit $M_2(x, y) \in \mathcal{P}$, i.e. $y^2 = -4ax$. Tangente à $\mathcal{P}$ en M_2 :

$$2y(Y - y) = -4a(X - x), \quad \text{soit } 2yY = -4a(X + x).$$

CNS pour que la tangente soit perpendiculaire à (OM) : $Y = mX$:
(NB : $M \notin (Ox)$ donc on peut supposer $y \neq 0$.)

$$\frac{-4a}{2y}\, m = -1, \quad \text{i.e. } y = 2am.$$

Alors la tangente coupe C en M car :

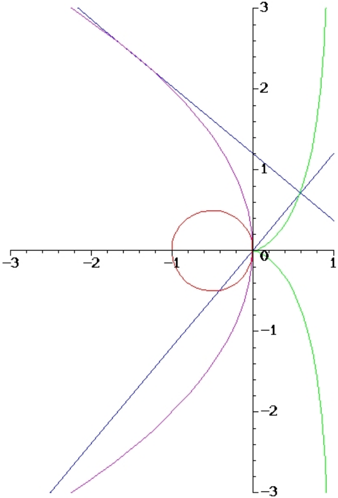
$$2y\left(\frac{am^3}{1+m^2}\right) = -4a\left(\frac{am^2}{1+m^2} + x\right).$$

(Remplacer $y = 2am$ et $x = (2am)^2/(-4a)$ et vérifier !)

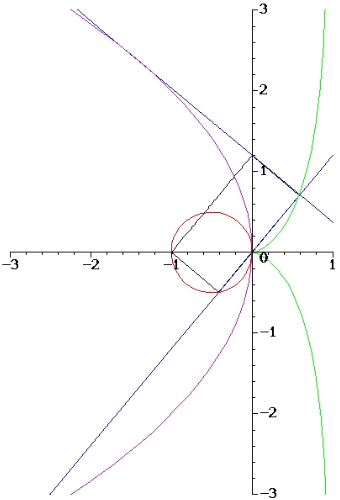
Sens :

C est la podaire de $\mathcal{P}$ par rapport à O.

4.2 $\mathcal{P}$ comme anti-podaire de C



4.2 $\mathcal{P}$ comme anti-podaire de C



$$F\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix} a\,\dfrac{m^2}{1+m^2} \\ a\,\dfrac{m^3}{1+m^2} \end{pmatrix}, \quad \Omega\binom{a}{ma}.$$

$$Q:\ X = 0 \text{ et } Y = \frac{-1}{m}(X + x_{M_2}) \Longrightarrow Q\binom{0}{ma}.$$

$$P\begin{pmatrix} -a\cos^2 t = -a\dfrac{1}{1+m^2} \\ -a\sin t\cos t = -a\,\dfrac{m}{1+m^2} \end{pmatrix}.$$

4.3 Un rectangle ?

1. Un parallélogramme :

$$\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \dfrac{-a}{1+m^2} \\ am\left(1 - \dfrac{1}{1+m^2}\right) = \dfrac{am^3}{1+m^2} \end{pmatrix} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OM}.$$

2. Un angle droit :

$$\overrightarrow{QM} \begin{pmatrix} \dfrac{am^2}{1+m^2} \\ \dfrac{am^3}{1+m^2} - am = \dfrac{-am}{1+m^2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{QF} \begin{pmatrix} -a \\ -am \end{pmatrix},$$

$$(\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QF}) = \frac{-a^2m^2}{1+m^2} + \frac{a^2m^2}{1+m^2} = 0.$$