E.A.D.M. 2010 – 2011
$S1$ U.E. Renforcements Mathématiques
Algèbre linéaire

Cours et T.D. de Jean-Marie MORVAN

Exercices sur la dualité

24 septembre 2010

Exercice 1 *Montrer que les trois applications suivantes sont des formes linéaires, déterminer une base de leur noyau et un supplémentaire de chacun de ces noyaux :*

1. $\ell_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell_1(x,y) = x - y$.
2. $\ell_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell_2(x,y,z,t) = x - y + 2z - t$.
3. $\ell_3 : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}$, $\ell_3(z_1,z_2,z_3,z_4) = z_1 + z_2 - 3z_3 + z_4$.

Exercice 2 *On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soient $\ell_1, \ell_2, \ell_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, par :*

$$\ell_1(x,y,z) = x - y + 2z, \quad \ell_2(x,y,z) = 2x - y + 3z, \quad \ell_3(x,y,z) = x - z,$$

et

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

l'application définie par

$$F(x,y,z) = (\ell_1(x,y,z), \ell_2(x,y,z), \ell_3(x,y,z)).$$

1. *Montrer que ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$.*
2. *Exprimer les coordonnées de ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 dans la base duale $\mathbb{B}^*$ de $\mathbb{B}$.*
3. *Montrer que $\mathbb{B}_1^* = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$ et déterminer la base $\mathbb{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ dont elle est la base duale.*
4. *Montrer que F est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de F^t (transposé de F) dans $\mathbb{B}_1^*$.*

Exercice 3 *On considère l'espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour un entier n non nul et pour tout $0 \le k \le n$, on définit l'application*

$$d_k : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

en posant pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$d_k(f) = f^{(k)}(0),$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de f.

1. *Montrer que la famille $(d_0, \ldots, d_n)$ est une famille libre de $(C^\infty(\mathbb{R}))^*$.*
2. *En déduire que $C^\infty(\mathbb{R})$ est de dimension infinie.*

Exercice 4 *Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V, (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Montrer que $H^0 = \{\ell \in V^*; H \subset \ker \ell\}$ est une droite vectorielle de V^*.*

Exercice 5 *Soient ℓ_1 et ℓ_2 des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que l'application $\phi : V \longrightarrow \mathbb{K}$ définie en posant pour tout $u \in V$, $\phi(u) = \ell_1(u)\ell_2(v)$ est une forme linéaire si et seulement si l'une de ces deux formes est nulle.*

Exercice 6 *Dans cet exercice $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

1. *Soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \phi(I_n) = 1; \\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \phi(M) = 0 \quad \Rightarrow \det M = 0, \end{cases} \tag{1}$$

(I_n désignant la matrice identité d'ordre n).

   (a) *Montrer que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{K})$, $\phi(M)$ est une valeur propre de M.*

   (b) *Montrer que, pour tout $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, $\phi(M) \in \{m_{11}, \ldots, m_{nn}\}$.*

2. *(a)* *Montrer que la matrice* $M_0 = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *vérifiant* $m_{ii} = 0$ *pour tout* $i = 1, \ldots, n$ *et* $m_{ij} = 1$ *pour tous* $i \neq j$, *est inversible pour tout* $n \geq 2$.

   Indication : on pourra montrer que 1 **n'est pas valeur propre de** $M_0 + I_n$**.**

   (b) *Déduire de ce qui précède que, pour* $n \geq 2$, *tout hyperplan de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *a une intersection non vide avec l'ensemble*

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det M \neq 0\}.$$
