E.A.D.M. 2010 – 2011
$S1$ U.E. Renforcements Mathématiques
Algèbre linéaire

Cours et T.D. de Jean-Marie MORVAN

Exercices sur les formes quadratiques

1er octobre 2010

Exercice 1 *Soit B une forme bilinéaire sur un espace vectoriel réel V et soit q sa forme quadratique associée.*

1. *Montrer* **l'identité de Cauchy**
$$q\left(q(u)v - B(u,v)u\right) = q(u)\left[q(u)q(v) - B(u,v)B(v,u)\right]. \tag{1}$$

2. *En déduire, si q est définie positive,* **l'inégalité de Cauchy-Schwarz**
$$B(u,v)B(v,u) \leq q(u)q(v). \tag{2}$$

Exercice 2 *Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n ($n \geq 1$). Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose*
$$B(P,Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt \quad \textit{et} \quad q(P) = B(P,P).$$

1. *Montrer que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? antisymétrique ?*
2. *Montrer que q est une forme quadratique. La forme q est-elle définie ? Si ce n'est pas le cas, exhiber un vecteur isotrope non nul.*
3. *Calculer la matrice de q dans la base $\mathbb{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$.*
4. *Pour $n = 2$, déterminer la signature de q. La forme q est-elle positive ? négative ?*
5. *Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui soit q-orthogonale.*

Exercice 3 *Soit*

$$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); a-d=0\right\}\ \textit{et}\ J=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

On définit l'application

$$B: V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$$

en posant, pour tous $M,N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$B(M,N)=\mathrm{T}r(MJN).^{1}$$

1. *Montrer que* B *est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique, antisymétrique ?*
2. *Montrer que* $\mathbb{B}=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* V.
3. *Déterminer la matrice dans la base* $\mathbb{B}$ *de la forme quadratique* q *définie en posant, pour tout* $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $q(M)=B(M,M)$.
4. *Déterminer la signature de* q*, son rang et son noyau. La forme* q *est-elle définie ? positive ? négative ?*
5. *Déterminer* $F^\perp$ *(c'est-à-dire le* q*-orthogonal de* F*) où*

$$F=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); a-d=0\right\}.$$

Exercice 4 *Effectuer une réduction de Gauss et déterminer le noyau, le rang et la signature des formes quadratiques suivantes :*

1. $q:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, $q(x,y,z)=2x^2+y^2-z^2+3xy-4xz$.
2. $q:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, $q(x,y,z)=x^2+y^2-az^2+3xy-bxz+yz$.
   On discutera suivant les valeurs de $a,b\in\mathbb{R}$**.**
3. $q:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} q(x,y,z,t) &= x^2+(1+2\lambda-\mu)y^2+(1+\lambda)z^2+(1+2\lambda+\mu)t^2\\ &\quad +2xy+2xz-2xt+2(1-\lambda)yz-2(1+\lambda)yt+2(\lambda-1)zt.\end{aligned}$$

   On discutera suivant les valeurs de $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$**.**
4. $q:\mathbb{R}^5\longrightarrow\mathbb{R}$, $q(x,y,z,t,s)=xy-xt+yz-yt+ys+zt-zs+2st$.

1. $\mathrm{T}r$ désigne l'opérateur *trace*.

Exercice 5 *Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n ($n \geq 1$) et soit d un entier tel que $1 \leq d \leq n$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose*

$$q(P) = (P^2)^{(d)}(0),$$

où $P^{(d)}$ est le polynôme dérivé à l'ordre d de P.

1. *Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa matrice dans la base $\mathbb{B} = \{1, X, \ldots, X^n\}$.*
2. *Déterminer la signature de q, son rang et son noyau.*

   Indication - On pourra utiliser les formules de Leibniz et Taylor :

$$(PQ)^{(d)} = \sum_{k=0}^{d} C_d^k P^{(k)} Q^{(d-k)} \quad \textbf{et} \quad P = \sum_{k=0}^{degP} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

3. *On suppose dans cette question que $n = d = 2m+1$ et on note*

$$\mathcal{P} = Vect\{X, X^3, \ldots, X^{2m+1}\}.$$

   (a) *Montrer que q est non dégénérée et déterminer une base q-orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.*

   (b) *Déterminer le q-orthogonal de $\mathcal{P}$ et montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel totalement isotrope.*