Chapitre 2

Corrigés ou indications : Suites et séries de fonctions

Exercice 2.4

1. Pour tout x fixé non nul $f_n(x) \sim \dfrac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par définition la suite (f_n) converge donc simplement vers la fonction identiquement nulle.
2. Puisque $|\sin x| \leq |x|$ pour tout x, on a pour tout x et tout $n \geq 1$

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n}.$$

   Il en résulte, en notant $M = \max(|a|, |b|)$, que $f_n(x) \leq M/n$ pour tout $x \in [a, b]$, et donc la convergence uniforme de $f_n(x)$ vers 0, pour $x \in [a, b]$.
3. L'égalité $f_n(n^2) = n^4 \sin \dfrac{1}{n^3}$ donne

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq n^4 \sin \frac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

   car, lorsque $n \to \infty$ on a $\sin(1/n^3) \sim 1/n^3$. A fortiori la suite $(\|f_n\|_\infty)$ ne tend pas vers 0 c'est à dire la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente.

Exercice 2.14

1. Sur $]1, \infty[$ on a $0 \leq< u_n(x) \leq 1/x^n$. Puisque $x > 1$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^n}$ est convergente, et, par comparaison, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est aussi une série convergente. D'où la convergence simple.

   Puisque u_n est une fonction décroissante sur $]1, +\infty[$, on a

$$\|u_n\|_\infty = \lim_{x\to1} u_n(x) = \lim_{x\to1} \frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{2}.$$

   La série n'est donc pas normalement convergente.

Etudions la convergence uniforme. Le reste d'ordre n est

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k} \geq \frac{1}{1+x^{n+1}},$$

et donc

$$\|R_n\|_\infty \geq \sup_{x>1} \frac{1}{1+x^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\|R_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, et la série n'est pas uniformément convergente.
Sur $[a,+\infty[$ on a convergence normale car $\|u_n\| = 1/(1+a^n)$.

2. Pour chaque x fixé on a

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{x}{n^2}.$$

Puisque la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2}$ est convergente, il en est de même de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, d'où la convergence simple.
Etudions la convergence normale. Calculons la norme de u_n en étudiant ses variations. Puisque

$$u_n' = \frac{(n^2+x^2)-2x^2}{(n^2+x^2)}$$

u_n atteint son maximum en $x=n$, et ce maximum est $1/(2n)$. La norme de u_n est donc $1/(2n)$ et la série des normes est divergente.
Sur $[0,a]$, pour tout $n \geq a$, la fonction u_n est croissante. On a donc, pour $n \geq a$, $\|u_n\|_\infty = \dfrac{a}{n^2+a^2}$, et, puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$ est convergente, la série est normalement convergente.
Reste la question de la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$. Le reste d'ordre n est

$$R_n(a) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a}{k^2+a^2}\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{a}{k^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{a\,\mathrm{d}t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t.$$

La primitive de $\dfrac{a}{t^2+a^2}$ (fonction de t) est $\operatorname{atan}(t/a)$ d'où

$$R_n(a) \geq \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}\left(\frac{n+1}{a}\right)$$

et enfin

$$\|R_n\|_\infty \geq \sup_{a\in[0,+\infty[} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}\left(\frac{n+1}{a}\right)\right] = \frac{\pi}{2}\cdot.$$

Donc pas de convergence uniforme.

3. Si $0 < x < n$ on a $u_n(x) \leq \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$. Tandis que si $x > n$ on a

$$u_n(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

Dans les 2 cas on a $|u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$ et donc $\|u_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$, ce qui donne la convergence normale, et la convergence uniforme.
On pouvait aussi calculer la valeur exacte de $\|u_n\|_\infty$ en étudiant les variations de cette fonction : La dérivée de u_n est du signe de

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(n^2+x^2) - 2x\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(n^2-3x^2)$$

elle s'annule pour $x = \frac{n}{\sqrt{3}}$, ce qui donne

$$\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{n}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\frac{\sqrt{n}}{n^2+\frac{n^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\frac{3}{4}\frac{1}{n^{3/2}}$$

et la convergence normale.

Exercice 2.15

Notons $u_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$.

1. Pour que la série converge il est nécessaire que $u_n(x)$ tende vers 0 quand n tend vers l'infini. Pour cela il faut (puisque $1+x^n \geq 1$) que $1+x^n$ tende vers l'infini, et donc que $x > 1$. Réciproquelent, si $x > 1$, la majoration par la série géométrique convergente
$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{x^n}$$
donne la convergence se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Soit $1 < A < +\infty$. Sur l'intervalle $[A, +\infty[$ on a
$$\left|u_n'(x)\right| = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} \leq \frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{n}{x^{n+1}} \leq \frac{n}{A^{n+1}}.$$
Or la série de terme général $v_n = \dfrac{n}{A^{n+1}}$ est convergente par la critère de d'Alembert puisque
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{A} < 1.$$
Ceci prouve la convergence normale de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sur tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$, avec $1 < A$, et donc sur tout intevalle fermé borné contenu dans $]1, +\infty[$. Puisque la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge pour au moins une valeur $x \in I$ (et même pour tout $x \in I$ par la queston 1), le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions s'applique, et donne résultat demandé.
3. Chaque u_n : $x \mapsto \frac{1}{1+x^n}$ est une fonction décroissante de x. Donc, si $x_1 < x_2$,
$$f(x_1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+x_1^k} \geq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_2^k} = f(x_2).$$
Il reste à étudier les limites de f en 1 et en $+\infty$.

En $x = 1$. Puisque f est dércoissante, $f(x)$ tend vers une limite, finie ou infine, lorsque x tend vers 1. Pour tout n et tout $x \in I$,

$$f(x) \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+x^n},$$

et donc,

$$\lim_{x\to 1} f(x) \geq \lim_{x\to 1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+x^n} = \frac{n+1}{2}.$$

Ceci montre que $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

En $+\infty$ On écrit

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$$

d'où

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x-1}$$

puis

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$
