Chapitre 3

Corrigés ou indications : Séries entières

Exercice 3.10

1. Soit $u_n \dfrac{|z^n|}{n+1}$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |z|$, et, par la règle de d'Alembert, si $|z| < 1$ la série converge, et si $|z| > 1$ $u_n \to +\infty$. Le rayon de convergence est donc 1.
2. Il suffit de prouver la convergence uniforme sur $[0, a]$ et sur $[-1, a]$. Puisque le rayon de convergence est 1 et $a < 1$, la convergence est uniforme sur $|z| \leq a$ et a fortiori sur $[0, a]$.

   Pour $-1 \leq x \leq 0$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ est alternée, et satisfait les hypothèses du théorème des séries alternées, car

   $$\frac{|x^{n+1}|}{n+2} / \frac{|x^n|}{n+1} = \frac{n+1}{n+2}|x| \leq 1.$$

   Par le théorème des séries alternées, la série converge pour tout $x \in [-1, 1]$ (on le savait déja pour $x > -1$ mais pas encore pour $x = -1$), et de plus, le reste d'ordre n est majoré par

   $$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k+2}\right| \leq \frac{|x^{n+1}|}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}.$$

   Puisque $1/(n+2) \to 0$ et ne dépend pas de x ceci prouve la convergence uniforme.
3. Pour $|z| \leq 1$, $z \neq 1$ on a

   $$\left|\sum_{k=p}^{q} z^k\right| = \left|\sum_{k=0}^{q-p} z^k\right| = \left|\frac{1 - z^{q-p+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{2}{|1 - z|}$$

   Et donc, par sommation d'Abel

   $$|S_q(z) - S_p(z)| \leq \frac{1}{p+2}\frac{2}{|1 - z|}$$

   La suite des sommes partielles $(S_n(z))$ est une suite de Cauchy. Cela donne la convergence de la série.

4. Si $z \in D_r$ la majoration précédente,
$$|S_q(z) - S_p(z)| \leq \frac{1}{p+2}\frac{2}{|1-z|}$$
donne
$$|S_q(z) - S_p(z)| \leq\leq \frac{1}{p+2}\frac{2}{r}.$$
Puis, faisant tendre q vers l'infini dans la majoration ci dessus on obtient
$$|S(z) - S_p(z)| = |R_p z| \leq \frac{1}{p+2}\frac{2}{r}$$
et la convergence uniforme.

Exercice 3.13

1. Soit y développable en série entière au voisinage de 0, de rayon de convergence R, solution de l'équation $3xy' + (2-5x)y = x$. Remplaçant x par 0 dans cette équation on obtient $y(0) = 0$ et le développement en série entière de y est de la forme $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R, +R[$ on peut dériver la série terme à terme, ce qui donne
$$\begin{aligned} 3xy' &= \sum_{n=1}^{\infty} 3na_n x^n \\ 2y &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\,a_n x^n \\ 5xy &= \sum_{n=1}^{\infty} 5a_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} 5a_{n-1}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 5a_{n-1}x^n \quad \text{car} \quad a_0 = 0. \end{aligned}$$
On en déduit le développement en série entière de $3xy' + (2-5x)y$
$$5\,a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}[(3\,n+2)a_n - 5\,a_{n-1}]x^n.$$
Par unicité du développement en série entière, y est soluition de $3xy' + (2-5x)y = x$ si et seulement si
$$a_1 = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{5}{(3n+2)}a_{n-1} \quad \text{pour} \quad n \geq 2 \tag{3.1}$$
Autrement dit, s'il existe une solution développable en série entière au voisinage de 0, elle est unique, donnée par $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, où les a_n sont définis par les équations (3.1)
Réciproquement, il reste à démontrer cette série entière a un rayon de convergence $R > 0$. On utilise le critère de d'Alembert. Pour tout x on
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\,|x|}{3n+5} = 0 < 1,$$
et donc, par la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge absolument pour tout réel x. Son rayon de convergence est $+\infty$.

2. Les équations (3.1) donnent par récurrence $a_n = 5^{n-2}/\prod_{2\le j\le n}(3j+2)$.
3. Pour $k \ge n+1$

$$a_{n+1} = \frac{5^{n-1}}{\prod_{2\le j\le n+1}(3j+2)} \quad \text{et} \quad a_k = \frac{5^{k-2}}{\prod_{2\le j\le k}(3j+2)}.$$

Le reste $R_n(x)$ est donc majoré en valeur absolue par

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{5^{k-2}}{\prod_{j=2}^{k}(3j+2)} |x|^k \\ &= a_{n+1} |x|^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{5^{k-n-1} |x|^{k-n-1}}{\prod_{j=n+2}^{k}(3j+2)} \end{aligned}$$

Le produit $\prod_{j=n+2}^{k}(3j+2)$ est égal à 1 lorsque $k=n+1$. Pour $k>n+1$ il est le produit de $k-n-1$ facteurs dont le plus petit est $3n+8$. Dans tous les cas ce produit est minoré par $(3n+8)^{k-n-1}$ et on en déduit

$$\begin{aligned} |R_n(|x|)| &\le a_{n+1} |x|^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{5|x|}{3n+8}\right)^{k-n-1} \\ &= a_{n+1} |x|^{n+1} \frac{1}{1-\frac{5|x|}{3n+8}} = a_{n+1} |x|^{n+1} \frac{3n+8}{3n+8-5|x|} \end{aligned}$$

4. On calcule les a_n, en utilisant la relation de récurrence $a_n = 5 \times a_{n-1}/(3n+2)$

$$\begin{array}{lllllllll} a_1 &=& 0.2000000\ldots, & a_2 &=& 0.0125000\ldots, & a_3 &=& 0.0568181\ldots \\ a_4 &=& 0.0202922\ldots & a_5 &=& 0.0059682\ldots & a_6 &=& 0.0014920\ldots \\ a_7 &=& 0.0003243\ldots & a_8 &=& 0.0000623\ldots & a_9 &=& 0.0000107\ldots \end{array}$$

Par la question précédente $|R_8(1)| \le a_9\frac{32}{27} < 15\times 10^{-6}$. La somme $S_8(1) = \sum_{n=1}^{8} a_n = 0.409957501\ldots$ est donc une valeur approchée à 15×10^{-6} près de $y(1)$, et donc

$$\left(\sum_{n=1}^{8} a_n\right) - 15\times 10^{6} = 0.4099425\ldots < y(1) < \left(\sum_{n=1}^{8} a_n\right) + 15\times 10^{6} = 0.4099725\ldots.$$

On en déduit $0.40994 < y(1) < 0.40998$. La valeur médiane de cet encadrement, 0.40996 est donc une valeur approchée de $y(1)$ à 2×10^{-5} près.

Exercice 3.17

Soit $a_n = 1/C_{2n}^{n}$. On vérifie facilement que, pour tout $n\ge 0$, $(4n+2)a_{n+1} = (n+1)a_n$.
Etudions la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$ par la règle de d'Alembert. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} \lim_{n\to+\infty} = \frac{n+1}{4n+2}|x| = \frac{|x|}{4}.$$

La série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente pour $|x| < 4$, et grossièrement divergente pour $|x| > 4$, son rayon de convergence est donc 4. Toujours par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence des séries $\sum (4n+2)a_{n+1}x^n$ et $\sum (n+1)a_n x^n$ est encore 4, et pour $|x| < 4$ on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty}(4n+2)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^n$$

c'est à dire

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^n.$$

Si $x \neq 0$ cela s'écrit encore $4f'(x) - \dfrac{2}{x}(f(x) - 1) = xf'(x) + f(x)$ ou

$$f'(x)(4-x) - f(x)\left(\frac{2}{x} + 1\right) = -\frac{2}{x}\cdot$$

Pour tout $x \neq 0 \in]-4, 4[$ on a donc

$$x(4-x)f'(x) - (x+2)f(x) = -2, \tag{3.2}$$

et on vérifie immédiatement, en utilisant l'égalité $f(0) = 1/C_0^0 = 1$, que cette équation est encore satisfaite lorsque $x = 0$.

L'équation homogène $x(4-x)u' - (x+2)u = 0$ est bien définie sur l'intervalle $]0, 4[$ (le coefficient de u' ne s'annule pas). Soit u une solution non identiquement nulle sur cet intervalle. Alors $u(x)$ *n'est jamais nul* pour $x \in]0,\ 4[$ [1], et l'équation homogène s'écrit

$$\frac{u'}{u} = \frac{x+2}{x(4-x)} = \frac{1}{2x} - \frac{3}{2}\frac{1}{x-4}\cdot$$

D'où, pour $0 < x < 4$, $\log|u| = \dfrac{1}{2}\log x - \dfrac{3}{2}\log(4-x) + c$, et la solution générale de l'équation homogène est

$$C\,u \quad \text{avec} \quad u = \sqrt{x}(4-x)^{-3/2}.$$

La méthode de variation de la constante consiste à chercher f sous la forme $f = zu$, d'où $f' = zu' + z'u$ et le membre gauche de l'équation (3.2) s'écrit

$$x(4-x)f' - (x+2)f = z\left[x(4-x)u' - (x+2)u\right] + x(4-x)z'u = x(4-x)z'u.$$

Pour que f soit solution de (3.2) s'écrit avec second membre il faut et il suffit que

$$x(4-x)z'u = -2 \quad \text{soit} \quad z' = -\frac{2\sqrt{4-x}}{x^{3/2}} = -\frac{2\sqrt{4x-x^2}}{x^2}\cdot$$

On est ramené au calcul de l'intégrale indéfinie

$$\int -\frac{2\sqrt{4x-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{2y}{x^2}\,\mathrm{d}x \tag{3.3}$$

[1] Car, par le théorème d'unicité de Lipschitz pour les équations différentielles linéaires, si $u(x_0) = 0$ pour un $x_0 \in]0,\ 4[$, la fonctions u et la fonction identiquement nulle 0 satisfont la même condition initiale $u(x_0) = 0 = 0(0)$ et donc $u = 0$.

avec $y = \sqrt{4x - x^2}$. C'est un cas particulier très simple d'*intégrale abélienne*. Les quantités y et x sont reliées par une équation de la forme $P(x, y) = 0$ où P est un polynôme. Lorsque P est de degré 2 la courbe C d'équation $P(x, y) = 0$ est une conique. Sur cet exemple $P(x, y) = y^2 - (4x - x^2) = (x - 2)^2 + y^2 - 4$, et C, d'équation

$$(x-2)^2 + y^2 = 4,$$

est cercle de centre$(2, 0)$ et de rayon 2. Puisque ce cercle passe par le point $(0, 0)$ il recoupe la droite D_t d'équation $y = tx$ (qui passe par 0) en un point $M \neq (0, 0)$ dont l'abscisse x est solution de

$$(x-2)^2 + t^2x^2 = 4 \quad \text{soit} \quad x\left[x(t^2+1) - 4\right] = 0,$$

ceci nous donne une représentation paramétrique de C,

$$x = \frac{4}{t^2+1} \quad y = \frac{4t}{t^2+1}. \tag{3.4}$$

Le changement de variable $x = 4/(t^2 + 1)$ dans l'intégrale (3.3) donne $dx = -\dfrac{8t}{(t^2+1)^2}$ puis, avec les équations (3.4)

$$\begin{aligned} z(x) = \int -\frac{2\sqrt{4x-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int \frac{\frac{4t}{t^2+1}}{\frac{16}{(t^2+1)^2}} \frac{8t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t^2}{t^2+1} \\ &= 4\,t - 4\,\mathrm{atan}(t) + 4c = 4\frac{y}{x} - 4\,\mathrm{atan}\,\frac{y}{x} + 4c \end{aligned}$$

où c reste à déterminer. L'expression de $f(x)$ pour $x \in]0, 4[$ est alors

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x)z(x) = 4\sqrt{x}(4-x)^{-3/2}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \mathrm{atan}\sqrt{\frac{4-x}{x}} + c\right) \qquad (3.5) \\ &= \frac{4}{4-x} + \frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}\left(c - \mathrm{atan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) \\ &= 1 + \frac{x}{4-x} + \frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}\left(c - \mathrm{atan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right). \end{aligned}$$

Supposons un instant $c \neq \pi/2$. Alors lorsque x tend vers 0 on aurait

$$f(x) - 1 \sim \frac{\sqrt{x}}{2}\left(c - \frac{\pi}{2}\right)$$

ce qui est absurde car, par définition $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + \cdots$ et donc, lorsque x tend vers 0, $f(x) - 1 \sim x/2$. Ainsi $c = \pi/2$. Remplaçant c par $\pi/2$ et x par 1 dans (3.5) on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{C_{2n}^n} = f(1) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - \mathrm{atan}\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$
