Chapitre 4

Corrigés ou indications : Séries de Fourier

Exercice 4.5

Remarquons que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{int}$ n'est pas une série trigonométrique ordinaire.

C'est une série trigonométrique exponentielle $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ bien particulière, parce que, pour tout $n < 0$, $c_n = 0$.

1. (a) La série proposée s'écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où u_n est définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(t) = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{int}$.
   Puisque $\left|e^{int}\right| = 1$, pour tout réel t, on a $|u_n(t)| = \frac{1}{(n)!^2}$. On a donc
   $$\|u_n\|_\infty = \frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{1}{n!},$$
   et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est normalement convergente, donc uniformément convergente. Puisque la convergence est uniforme et les u_n continues, $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue ; et 2π-périodique puisque chaque u_n est 2π-périodique.

   (b) Puisque $u_n'(t) = inu_n(t)$ et $u_n'' = (in)^2 u_n(t)$, on a de même
   $$\left\|u_n'\right\|_\infty = \frac{n}{(n!)^2} \quad \text{et} \quad \left\|u_n''\right\|_\infty = \frac{n^2}{(n!)^2},$$
   et les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n''$ sont elles aussi normalement convergentes. On peut donc appliquer deux fois le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, ce qui donne
   $$y''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(in)^2}{(n-1!)^2} e^{int} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1!)^2} e^{int} = y(t) e^{int}.$$

2. Remarquons que pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^1$, la série de Fourier de g' s'obtient en dérivant terme à terme la série de Fourier de g. En effet, si T est

la période et $\omega = 2\pi/T$ la pulsation, le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourierde g' est $c_n(g') = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T g'(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t$. Une intégration par parties avec

$$u(t) = e^{-in\omega t}, \quad v'(t) = g'(t) \quad \text{et} \quad v = g(t)$$

donne

$$\begin{aligned} c_n(g') &= \frac{1}{T}\int_0^T g'(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left[g(t)e^{-in\omega t}\right]_0^T - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)in\omega e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= -in\omega\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t = -in\omega c_n(g). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout n, $c_n(g') = -i\omega n c_n(g)$, et la série de Fourier de g'

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(g')e^{-in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} -in\omega c_n(g)e^{-in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(g)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-in\omega t}$$

s'obtient tout simplement en dérivant terme à terme la série de Fourier de g.

(a) Par la remarque précédente

$$c_n(g'') = -inc_n(g') = (-in)^2c_n(g) = -n^2c_n(g).$$

(b) Si g est une solution de l'équation E on a

$$c_n(g'') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g''(t)e^{-int} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{it}e^{-int} = c_{n-1}(g).$$

(c) Si g est une solution de E, il résulte de a) et de b) que

$$n^2c_n(g) = -c_{n-1}(g).$$

En faisant $n = 0$ on en déduit $c_{-1}(g) = 0$, puis, $c_n(g) = 0$ pour tout $n < 0$. Pour $n \geq 0$ on obtient par récurrence $c_n(g) = c_0(g)\dfrac{(-1)^n}{(n!)^2}$. La série de Fourier de g est donc

$$c_0(g)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}e^{int}.$$

De plus g étant de classe C^1, par le théorème de Dirichlet, elle est la somme de sa série de Fourier

$$g(t) = c_0(g)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}e^{int} = c_0(g)f(t).$$

Ainsi g appartient à l'espace vectoriel de dimension 1 engendré par f. Puisque l'équation différentielle (E) est linéaire homogène, toute fonction de la forme kf pour $k \in \mathbb{R}$ est encore une solution de (E), et 2π périodique puisque f est 2π-périodique.

Exercice 4.8

1. La fonction f est impaire. Sa restriction à chaque intervalle $]k\pi,\ (k+1)\pi[$ se prolonge en la fonction constante $t \mapsto (-1)^k$ sur $[k\pi,\ (k+1)\pi]$, qui est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Explicitons les coefficients a_n et b_n de sa série Fourier trigonométrique. Puisque f est impaire les a_n sont tous nuls. Calculons b_n pour $n \geq 1$.
$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi}[(-1)^n - 1].$$
Il en résulte $b_{2n} = 0$ et $b_{2n-1} = 4/(\pi/(2n-1))$. La série de Fourier de f est donc
$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$
Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi$, par le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier est simplement convergente, et sa somme S satisfait
$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{Z}\pi \end{cases}$$
Puisque $f(k\pi) = 0$, dans tous les cas $S(x) = f(x)$, autrement dit f coïncide avec la somme de sa série de Fourier.
2. $S_n(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ donne $S_n'(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$. Explicitons cette somme.
   (a) Pour $x = q\pi$, les entiers $(2k-1)q$ sont tous de la parité de q, et donc $\cos((2k-1)q\pi) = (-1)^q$. Il en résulte $S_n'(q\pi) = (-1)^q 4n/\pi$, et en particulier, lorsque $q = 0$, $S_n'(0) = 4n/\pi$.
   (b) Pour $x \neq k\pi$, en notant $z = e^{ix}$, $(\neq \pm 1)$ on a
$$\begin{aligned} S_n'(x) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re} z(1 + z^2 + \cdots + z^{2n-1}) \\ &= \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left[z\left(\frac{1-z^{2n}}{1-z^2}\right)\right] = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{2inx}-1}{e^{ix}-e^{-ix}}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}. \end{aligned}$$
   Puisque $S(0) = -S(\pi) = 4n/\pi \neq 0$, les 0 de S_n' appartenant à l'intervalle $[0,\pi]$ sont les $k\pi/(2n)$ avec $k = 1, 2, \ldots (2n-1)$. Le premier extremum de S_n est atteint en $\pi/(2n)$, c'est un maximum car $\sin(2nx)$ est positif sur $[0,\pi/(2n)]$ et change de signe au passage en $\pi/(2n)$.
3. Puisque $S_n(0)$ est nul, et S_n de classe $\mathcal{C}^1$, on a pour tout x
$$S(x) = S_n(x) - S_n(0) = \int_0^x S_n'(u)\,\mathrm{d}u.$$

En particulier $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2n}} S_n'(u)\,\mathrm{d}u$ et, en écrivant $u = t/(2n)$,

$$a_n = \int_0^{\pi} \frac{1}{2n} S_n'\left(\frac{t}{2n}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2n\sin\frac{t}{2n}}\,\mathrm{d}t,$$

car, par la question 2 on a $\dfrac{1}{2n}S_n'\left(\dfrac{t}{2n}\right) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin t}{2n\sin\frac{t}{2n}}$ pour tout $t \in [0,\pi]$ en convenant que pour $t=0$ on a $\dfrac{\sin t}{2n\sin\frac{t}{2n}} = 1$.

4. Démontrons que $\left(\dfrac{\sin t}{2n\sin\frac{t}{2n}}\right)_n$ converge uniformément vers $\dfrac{\sin t}{t}$ pour $t \in [0,\pi]$.

Pour $0 < t \le \pi$ on écrit

$$\left|\frac{\sin t}{2n\sin\dfrac{t}{2n}} - \frac{\sin t}{t}\right| = \left|\frac{\sin t}{t}\right| \left|\frac{\dfrac{t}{2n} - \sin\dfrac{t}{2n}}{\sin\dfrac{t}{2n}}\right| \le \left|\frac{\dfrac{t}{2n} - \sin\dfrac{t}{2n}}{\sin\dfrac{t}{2n}}\right|. \tag{4.1}$$

La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée à la fonction sin sur l'intervalle $[0,x]$ donne $\sin x - x = -\dfrac{x^3}{6}\cos(\theta x)$ avec $0 < \theta < 1$. Il en résulte

$$\forall t \in [0,\pi], \qquad \left|\frac{t}{2n} - \sin\frac{t}{2n}\right| \le \left|\frac{t^3}{48n^3}\right|. \tag{4.2}$$

Sur l'intervalle $[0,\pi/2]$ la fonction sinus est concave. Le graphe de sa restriction à $[0,\pi/2]$ est donc « au dessus » du graphe de la droite d'équation $y = 2x/\pi$ reliant les points $(0,0$ et $(\pi/2, \sin\pi/2)$. C'est à dire que l'on a

$$\forall t \in [0,\pi/2], \qquad \sin t \ge \frac{2t}{\pi}$$

et donc

$$\forall n \ge 1,\ \forall t \in [0,\pi], \qquad \sin\frac{t}{2n} \ge \frac{t}{\pi n}\cdot$$

Avec (4.1) et (4.2) on en déduit pour $n \ge 1$ et $t \in]0,\pi]$,

$$\left|\frac{\sin t}{2n\sin\frac{t}{2n}} - \frac{\sin t}{t}\right| \le \frac{t^3/(48n^3)}{t/(n\pi)} = \frac{\pi t^2}{48n^2} \le \frac{\pi^3}{48n},$$

et cette majoration est encore vérifiée lorsque $t=0$ car dans ce cas le terme gauche est $1-1=0$. Ceci prouve la convergence uniforme de $\dfrac{\sin t}{2n\sin\frac{t}{2n}}$ vers $\dfrac{\sin t}{t}$ sur $[0,\pi]$. On peut donc écrire

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{2n\sin\frac{t}{2n}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sin t}{2n\sin\frac{t}{2n}}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

5. On part de

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

qui donne immédiatement, pour $t \neq 0$,

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

La somme de cette série entière de rayon de convergence infini, est donc le prolongement par continuité en 0 de $\sin t/t$. La convergence est uniforme sur tout intervalle $[0, a]$, en particulier sur l'intervalle $[0, \pi]$, et on peut écrire

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}. \tag{4.3}$$

Notons $u_n = \dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$. Pour $n \geq 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{(2n+2)(2n+3)^2}\pi^2 \leq \frac{\pi^2}{(2n+3)^2} \leq \frac{\pi^2}{25} \leq 1.$$

Pour $n = 0$ on vérifie immédiatement que $u_1/u_0 = \pi^2/18 \leq 1$. La suite (u_n) est donc décroissante et le théorème des séries alternées s'applique à la série (4.3). Les sommes partielles successives sont alternativement des valeurs approchées par excès et par défaut de la somme de cette série. Le calcul des premiÃ¨res sommes partielles donne

$$\sum_{n=0}^{5} (-1)^n u_n = 1.851902\ldots \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{6} (-1)^n u_n = 1.851938\ldots$$

puis l'encadrement $1.85190 < \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t < 1.85194$. Avec la question 4 on en déduit

$$1.1789 < \frac{2}{\pi} 1.85190 < \lim a_n < \frac{2}{\pi} 1.85194 < 1.1790,$$

et $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1.1789\ldots$.