Chapitre 5

Corrigés ou indications : Equations différentielles

Exercice 5.7

On applique la méthode générale de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, lorsque l'on connait une solution particulière u de l'équation homogène associée. On cherche y sous la forme $y = zu$. Si $y = zu$ on a

$$\begin{aligned} y &= zu \\ y' &= z'u + zu' \\ y'' &= z''u + 2z'u' + zu''. \end{aligned}$$

Regroupant les termes en z, en z' et en z'',

$$0 = 4xy'' + 2y' + y = 4xuz'' + (8xu' + 2u)z'$$

les termes en z on disparu. Pour que y soit solution de l'équation proposée, il suffit donc que z soit solution de

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{8xu' + 2u}{4xu} = -2\frac{u'}{u} - \frac{1}{2x},$$

c'est à dire que $|\ln z'|$ soit une primitive de $-2\frac{u'}{u} - \frac{1}{2x}$. Une solution particulière est obtenue par

$$\ln z' = -2\ln u - \frac{1}{2}\ln x$$

puis, en appliquant l'exponentielle aux deux membres de cette égalité,

$$z' = \frac{1}{u^2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} = 2\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}$$

Sachant que $\sqrt{x}$ a pour dérivée $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $\tan x$ a pour dérivée $\frac{1}{\cos^2 x}$ on obtient une solution particulière de l'équation en z,

$$z = 2\tan\sqrt{x}$$

et enfin une solution particulière de l'équation initiale, $y = zu = z\cos\sqrt{x} = 2\sin\sqrt{x}$. Puisque cette équation est homogène, multipliant cette solution par la constante $1/2$ on obtient encore une solution $x \mapsto \sin\sqrt{x}$. Nous disposons maintenant de 2 solutions de l'équation proposée, la solution $x \mapsto \cos\sqrt{x}$ et la solution $x \mapsto \sin\sqrt{x}$. Puisque ces 2 solutions ne sont pas colinéaires, elles forment une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation proposée, qui est donc l'ensemble des

$$y = \lambda\cos\sqrt{x} + \mu\sin\sqrt{x}$$

pour λ, $\mu \in \mathbb{R}$.