M1 MEEF 2nd degré, CAPES de Mathématiques

Écrit blanc du 28 septembre 2015

Durée : 5h

Une attention particulière sera portée lors de la correction à la lisibilité de la copie et à la qualité de la rédaction. Par ailleurs, si un(e) candidat(e) détecte ce qu'il/elle pense être une erreur d'énoncé, il/elle le signale très clairement sur sa copie, propose une correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Les trois premiers exercices font appel à des résultats classiques d'analyse qui n'ont pas à être redémontrés, sauf lorsque cela est explicitement demandé. Certains de ces résultats sont démontrés dans le problème.

Exercice 1.

1. Justifier que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On note dorénavant

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

2. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} \frac{dt}{1+t^2}$$

   (a) Démontrer que les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer leurs dérivées. Préciser la valeur de $f(0)$ et $g(0)$.

   (b) Prouver que pour tout réel positif x,

$$f(x) = \int_0^1 x e^{-x^2u^2}\, du$$

   (c) En déduire que $g' = -2ff'$, puis que la fonction $g + f^2$ est constante et déterminer la valeur de cette constante.

   (d) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $e^{-(1+t^2)x^2}/(1+t^2)$ converge vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, et que cette limite est uniforme, c'est-à-dire que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$ et tout $t \in [0,1]$,

$$0 \leq \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} \leq \epsilon.$$

   (e) Montrer que si une suite ϕ_n de fonction continues converge uniformément vers une fonction ϕ sur l'intervalle $[0,1]$, alors l'intégrale de ϕ_n sur $[0,1]$ converge vers l'intégrale de ϕ sur $[0,1]$.

   (f) En déduire la limite de g en $+\infty$.

   (g) Conclure quant à la valeur de I.

Exercice 2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1.$$

1. Quel est le signe de $f_n(0)$? De $f_n(1)$?

2. Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$. Donner la limite de f_n en $+\infty$.
3. En déduire que f s'annule en deux réels positifs u_n et v_n qui vérifient $u_n < 1 < v_n$.
4. Quelle est la limite de la suite v_n ?
5. (a) Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
   (c) Conclure quant à la monotonie de la suite (u_n), puis que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
6. Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g_n(x) = \ln 3 + n\ \ln x - x^2$
   (a) Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.
   (b) On suppose que $\ell \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Conclusion ?
   (c) Soit la suite $(w_n)_{n\geq 2}$ définie pour tout $n \geq 2$ par $w_n = u_n - 1$. Trouver, en utilisant un développement limité de $g_n(1 + w_n)$, un équivalent simple de w_n.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\ dt$$

1. Montrer que f est une fonction impaire de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Justifier que f admet un développement en série entière au voisinage de 0.
3. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
4. Exprimer f' en fonction de f et en déduire une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (E) dont f est solution.
5. Soit g une série entière de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ solution de (E). Écrire une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n).
6. En déduire une expression du développement en série entière de f.

Problème

Les différentes parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres, en admettant les résultats de parties précédentes.

Partie A - Théorème des valeurs intermédiaires.

1. *Dichotomie.* Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que f $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ et on construit deux suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante : on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$, puis, pour tout $n \geq 1$:
   – Si $f((a_n + b_n)/2) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$.
   – Sinon, on pose $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$

   (a) Justifier que les suites (a_n) et (b_n) sont deux suites de l'intervalle $[a, b]$ vérifiant pour tout $n \geq 0$, $a_n \leq b_n$ et $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$. Montrer également que la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n), décroissante.
   (b) En déduire que (a_n) et (b_n) sont convergentes, de même limite notée ℓ.
   (c) Que peut-on dire de $f(\ell)$?
   (d) On souhaite obtenir une approximation à ε près d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur un intervalle $[a, b]$: écrire un algorithme prenant en entrée la fonction f, l'intervalle considéré et la précision souhaitée, et donnant comme résultat le nombre d'itérations et la solution approchée de l'équation.

2. Déduire de la question précédente que si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, elle prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.
3. Énoncer le théorème obtenu (ou théorème des valeurs intermédiaires). *Une des conséquences du théorème des valeurs intermédiaires, que l'on pourra utiliser sans justification dans la suite de ce problème, est que l'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.*
4. Sous quelle condition peut-on affirmer qu'il existe une unique solution de l'équation $f(x) = k$ sur un intervalle $[a, b]$ fixé ?
5. Donner un exemple de fonction f non continue sur un intervalle $[a, b]$ et prenant toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. *Une représentation graphique de cette fonction pourra suffire.*
6. Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, non continue en 0, et telle que, pour tout intervalle $[a, b]$, f prend sur $[a, b]$ toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.
7. *Quelques applications.*
   (a) Soit f une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs dans ce même intervalle. Montrer à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un réel c de $[a, b]$ tel que $f(c) = c$.
   (b) Soit g une fonction positive et continue sur $[a, b]$ et f une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer que la quantité
   $$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\ dx}{\int_a^b g(x)\ dx}$$
   est comprise entre le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$.
   En déduire qu'il existe un réel c de $[a, b]$ tel que
   $$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(c) \int_a^b g(x)\ dx$$

Partie B - Théorème de Rolle

On considère dans cette partie une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$.

1. On suppose pour cette question que $f(a) = f(b)$.
   (a) On suppose que le maximum de f sur $[a, b]$ est atteint en $\alpha \in]a, b[$. Montrer que $f'(\alpha) = 0$.
   (b) En déduire que si f n'est pas constante sur $[a, b]$, il existe un point de $]a, b[$ de dérivée nulle.
   (c) Traiter le cas d'une fonction constante sur $[a, b]$.
   (d) Énoncer le théorème obtenu (théorème de Rolle).
2. En déduire que, sous la simple condition de continuité de f sur $[a, b]$ et de dérivabilité sur $]a, b[$, il existe un réel c de]a,b[tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ (théorème des accroissements finis). Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Démontrer une inégalité vérifiée par $f(b) - f(a)$, valable lorsque la dérivée de f est bornée sur $]a, b[$.
4. Citer une condition assurant que la dérivée d'une fonction est bornée sur tout intervalle compact.

Partie C - Formules de Taylor

On rappelle qu'une fonction u est négligeable devant une fonction v au voisinage d'un point a si le quotient u/v, défini dans un voisinage de a privé de a, tend vers 0 en a, ce que l'on note $u = o_a(v)$, ou plus simplement $u = o(v)$.

1. *Formule de Taylor-Young*
   (a) Montrer que si f est une fonction définie dans un voisinage d'un réel a et dérivable en a, alors $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est négligeable devant $(x-a)$ au voisinage de a.
   (b) Montrer, par exemple à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que si la dérivée R' d'une fonction R est négligeable devant $(x-a)^{n-1}$ au voisinage de a, alors R est négligeable devant $(x-a)^n$ au voisinage de a.
   (c) En déduire que si une fonction f admet une dérivée d'ordre n en a, alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n)$$

2. *Formule de Taylor avec reste intégral.*
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors on a la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n : pour tout couple $(a,b) \in I^2$

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} (b-a)^k f^{(k)}(a) + \int_a^b f^{(n+1)}(x) \frac{(b-x)^n}{n!}\, dx$$

   (b) Montrer également, par exemple en utilisant la question A.6.b), la formule de Taylor Lagrange : il existe un réel ξ de $[a,b]$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} (b-a)^k f^{(k)}(a) + f^{(n+1)}(\xi) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

   (c) *Un exemple.* Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

   Tracer l'allure des courbes représentatives de ces trois fonctions. Que peut-on remarquer ?
   (d) Retrouver que si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors elle admet un développement limité à l'ordre n en a.
   (e) Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $f(a) = 0$ et telle qu'il existe $n \geq 1$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f s'annule uniquement en a. On dit dans ce cas que le point a est un zéro isolé de f.
   (f) Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-x^{-2}} \sin(x^{-1})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que toutes ses dérivées sont nulles en 0. Déterminer tous ses zéros et préciser lesquels sont des zéros isolés.
3. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$. Expliciter f' et f''. Appliquer la formule de Taylor à l'ordre 1 à f en $a = 1$ et en déduire l'existence d'une fonction ϕ telle que $f(x) = f(1) + (\phi(x))^2$. Préciser les valeurs de $\phi(1)$ et $\phi'(1)$ ainsi que la régularité de ϕ. Montrer que ϕ est bijective.
4. *Méthode de Newton.* On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ et on cherche une valeur approchée d'un zéro α de f. On suppose que f' ne s'annule pas dans un voisinage de α. Soit x_0 un réel. On construit une suite (x_n) par récurrence en posant, pour tout $n \geq 0$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe représentative de f au point $(x_n, f(x_n))$ et de l'axe des abscisses.

(b) Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre 1 entre x et α.

(c) En déduire qu'il existe un réel ξ_x compris entre x et α tel que

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = -(\alpha - x) - \frac{f''(\xi_x)}{2f'(x)}(\alpha - x)^2$$

(d) Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{M}{2m}|x_n - \alpha|^2$$

où M désigne un majorant de f'' sur un intervalle contenant α et tous les (x_n), et m désigne un minorant de f' sur le même intervalle.

(e) En déduire que, avec $K = M/2m$, la suite (x_n) vérifie

$$K|x_n - a| \leq (K|x_0 - \alpha|)^{2^n}$$

(f) Commenter la vitesse de convergence de la suite (x_n) et la comparer avec celle fournie par l'algorithme de dichotomie.

Partie D : Majoration de l'erreur dans un calcul numérique d'intégrale.

On se donne une fonction f continue sur l'intervalle $[0, 1]$. On note, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

1. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et on note, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt.$$

(a) À quelle classe appartient F ?

(b) Pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à F, à l'ordre 1 entre k/n et $(k+1)/n$.

(c) En déduire que

$$(*) \qquad F(1) - S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f'(t)\left(\frac{k+1}{n} - t\right)\ dt$$

(d) Déterminer une constante M telle que

$$\left|\int_0^1 f(t)\ dt - S_n(f)\right| \leq \frac{M}{n}\max_{[0,1]}|f'|$$

(e) On souhaite calculer avec une précision de 10^{-3} l'intégrale sur $[0, 1]$ de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$, par la méthode des rectangles. Quelle valeur de n conseillez-vous de choisir ?

2. On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$.

(a) Reprendre la relation $(*)$ en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2 et en déduire que

$$(*) \qquad F(1) - S_n(f) = \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\frac{k+1}{n} - t\right)^2 f''(t)\ dt$$

(b) Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) + o(1)$$

(c) En déduire que

$$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\ dt + \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

La vitesse de convergence de (S_n) vers l'intégrale de f sur $[0, 1]$ est donc bien en $1/n$.