M1 MEEF 2nd degré, CAPES de Mathématiques

Écrit blanc du 28 septembre 2015

Corrigé
Durée : 5h

Exercice 1.

1. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue du $\mathbb{R}^+$. Elle est donc intégrable sur tout intervalle borné. Il reste à vérifier que l'intégrale proposée est convergente en $+\infty$.
   Pour cela, remarquons que, pour tout réel $t \geq 1$, on a $e^{-t^2} \leq e^{-t}$, et la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1 + \infty[$ (par exemple car une des primitives de $t \mapsto e^{-t}$ est $t \mapsto -e^{-t}$ qui converge lorsque t tend vers $+\infty$).
2. (a) La fonction f est une primitive d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \exp(-x^2)$.
   Considérons la fonction de deux variables $\psi : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$

   $$\psi(x,t) = \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$$

   Pour tout x fixé, $t \mapsto \psi(x,t)$ est intégrable sur $[0,1]$.
   En particulier, pour $x = 0$,

   $$g(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \big[\arctan t\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

   La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a

   $$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$$

   On a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $t \in [0,1]$,

   $$\left|\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2xe^{-x^2} \leq M$$

   où M désigne un majorant de $2xe^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$. Les fonctions constantes étant intégrables sur $[0,1]$, on peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale et on obtient que la fonction g est dérivable, de dérivée, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

   $$g'(x) = \int_0^1 -2xe^{-(1+t^2)x^2}\ dt$$

   (b) Pour $x = 0$, le résultat est trivial, et pour $x > 0$, on effectue le changement de variable en posant $t = x.u$. Lorsque t parcourt $[0,x]$, u parcourt $[0,1]$, ce qui fournit le résultat.

   (c) On a vu que pour tout $x \geq 0$,

   $$f'(x) = e^{-x^2} \qquad \text{et} \qquad f(x) = \int_0^1 xe^{-x^2u^2}\ du$$

   On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

   $$-2f'(x)f(x) = -2e^{-x^2}\int_0^1 xe^{-x^2u^2}\ du = \int_0^1 -2xe^{-x^2(1+u^2)}\ du = g'(x)$$

   La fonction $g + f^2$ est donc de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit qu'elle est constante. On sait par ailleurs que $g(0) + f^2(0) = \pi/4$. La valeur de cette constante est donc $\pi/4$.

(d) On peut par exemple majorer, pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \geq 0$, $e^{-(1+t^2)x^2}/(1+t^2)$ par e^{-x^2}. On obtient ainsi que, pour tout $t \in [0,1]$ fixé, $e^{-(1+t^2)x^2}$ tend vers 0 et que cette convergence est uniforme en t.

Soit en effet ϵ un réel strictement positif fixé. Pour A suffisamment grand, on aura $e^{-A^2} \leq \epsilon$, et pour tout $x \geq A$ et tout $t \in [0,1]$,

$$\frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} \leq e^{-x^2} \leq e^{-A^2} \leq \epsilon.$$

(e) Soit ϕ_n une suite de fonctions continues, qui converge uniformément vers ϕ sur $[0,1]$. La fonction ϕ est alors continue. Considérons un réel $\epsilon > 0$.

Il existe un rang N tel que pour tout entier $n \geq N$ et tout réel $t \in [0,1]$, on a

$$|\phi_n(t) - \phi(t)| \leq \epsilon$$

En intégrant cette inégalité, il vient

$$\left| \int_0^1 \phi_n(t)\ dt - \int_0^1 \phi(t)\ dt \right| \leq int_0^1 |\phi_n(t) - \phi(t)|\ dt \leq \epsilon$$

On peut alors conclure que $(\int_0^1 \phi_n)$ converge vers $\int_0^1 \phi$.

(f) Lorsque x tend vers $+\infty$, $e^{-x^2(1+t^2)}/(1+t^2)$ converge vers 0, uniformément en $t \in [0,1]$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédent, et on obtient que, lorsque x tend vers $+\infty$, $\int_0^1 \psi(x,t)\ dt$ admet une limite, et que cette limite est nulle.

(g) On sait que pour tout x, $f^2(x) + g(x) = \pi/4$, et que g tend vers 0 en $+\infty$. On peut donc en déduire que $f^2(x)$ tend vers $\pi/4$.

Par ailleurs, f tend vers I en $+\infty$, et I est naturellement un réel positif. Il vient alors $I = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1.$$

1. Pour tout $n \geq 2$, $f_n(0) = -1$, donc $f_n(0) < 0$ et $f_n(1) = 3e^{-1} - 1$. Puisque $e < 3$, $f_n(1) > 0$.
2. Dérivons f_n sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x \geq 0$,

$$f_n'(x) = (-6x^{n+1} + 3nx^{n-1})e^{-x^2} = 3x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$$

La dérivée de f_n est donc positive sur $[0, \sqrt{n/2}]$ et négative au delà. La fonction f_n est alors croissante sur $[0, \sqrt{n/2}]$, atteint son maximum en $\sqrt{n/2}$, et décroissante sur $[\sqrt{n/2}, +\infty[$. La limite de f_n en $+\infty$ est égale à -1.

3. Puisque f_n est croissante sur $[1, \sqrt{n/2}]$,que $f_n(1) > 0$, et que $\sqrt{n/2} \geq 1$, on peut affirmer que $f_n(\sqrt{n/2}) > 0$.

Utilisons le théorème des valeurs intermédiaires (ou plutôt son corollaire se rapportant aux fonctions monotones) :
- Sur intervalle $[0,1]$, f_n est strictement croissante et vérifie $f_n(0) < 0 < f_n(1)$. Elle admet donc un unique zéro sur cet intervalle. On le note u_n.
- Sur l'intervalle $[1, \sqrt{n/2}$, la fonction f_n est strictement croissante avec $f_n(1) > 0$. Il n'y a donc pas de zéro de f_n sur $[1, \sqrt{n/2}$.
- Sur l'intervalle $[\sqrt{n/2}, +\infty[$, f_n est strictement décroissante. On sait que $f_n(\sqrt{n/2}) > 0$ et $\lim_{+\infty} f_n < 0$. On peut alors conclure que f_n admet un unique zéro, que l'on note v_n sur cet intervalle.

Finalement, pour tout $n \geq 2$, f_n s'annule en exactement deux réels positifs u_n et v_n, et on a $0 < u_n < 1 \leq \sqrt{n/2} < v_n$.

4. Puisque pour tout $n \geq 2$, $v_n \geq \sqrt{n/2}$, on peut affirmer que (v_n) diverge vers $+\infty$.
5. (a) u_n étant un zéro de f_n, $e^{-u_n^2} = 1/(3u_n^n)$.
   (b) On a
$$f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}e^{-u_n^2} - 1 = 3u_nn + 1\frac{1}{3u_n^n} - 1 = u_n - 1$$
   On en déduit que $f_{n+1}(u_n) < 0$.
   (c) Rappelons que f_{n+1} est croissante sur $[0, 1]$. Puisque $f_nn + 1(u_n) < 0$ ce la implique que $u_n \leq u_nn + 1$.La suite (u_n) est donc strictement croissante.
   Elle est par ailleurs majorée (par 1), donc on peut affirmer qu'elle converge vers un réel $l \leq 1$.
6. Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g_n(x) = \ln 3 + n\ \ln x - x^2$
   (a) On remarque que, pour tout $x \geq 0$, $f_n(x) = e^{g_n(x)} - 1$, donc f_n s'annule si et seulement si g_n s'annule.
   (b) La suite (u_n) est donc une suite croissante et convergente vers ℓ de réels, et on a pour tout $n \geq 2$,
$$n \ln u_n = u_n^2 - \ln 3$$
   Lorsque n tend vers l'infini, u_n^2 tend vers ℓ^2, donc $n \ln u_n$ converge nécessairement vers $\ell^2 - ln3$. On en déduit que $\ln u_n$ tend vers 0, c'est-à-dire que $\ell = 1$.
   (c) On remarque que, pour tout $n \geq 2$, $\ln(1 + w_n) = -\ln 3 + (1 + w_n)^2$. Lorsque n tend vers l'infini, (w_n) tend vers 0, donc $n \ln(1 + w_n)$ équivaut à nw_n. Par ailleurs, $-\ln 3 + (1 + w_n)^2$ tend vers $1 - \ln 3$.
   On a donc
$$w_n \sim_n \frac{1}{n}(1 - \ln 3)$$

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\ dt$$

1. La fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\ dt$ est la primitive d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$: elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   On a trivialement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$, donc f est bien impaire.
2. La fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$ admet un développement en série entière (composition de deux fonctions développables en série entière) ; et le rayon de convergence de cette série est $+\infty$.
   De même la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ admet un développement en série entière de rayon de convergence infini. Sa primitive admet donc un développement en série entière de même rayon de convergence.
   On peut alors conclure que f admet un développement en série entière, et son rayon de convergence est infini.
3. $f(0) = 0$.
   Pour tout x, $f'(x) = -2xf(x) + 1$, donc $f'(0) = 1$.
4. cf question précédente : f est solution de : $(E) \qquad f'(x) = -2xf(x) + 1$.
5. Si g est de la forme $g(x) = \sum_{n\geq 0} a_nx^n$, alors $g'(x) = \sum_{n\geq 1} na_nx^{n-1}$. La série entière g est donc solution de (E) si et seulement si
$$\sum_{n\geq 1} na_nx^{n-1} = 1 - \sum n \geq 02a_nx^{n+1}$$

ce qui peut s'écrire

$$\sum_{k\geq 0}(k+1)a_{k+1}x^k = 1 - \sum_{k\geq 1} 2a_{k-1}x^k$$

L'unicité de la décomposition en série entière nous permet d'identifier les termes de même degré de part et d'autre de l'égalité : $a_1 = 1$, et pour $k \geq 1$, $a_{k+1} = -\frac{2a_{k-1}}{k+1}$

6. Notons (a_n) les coefficients de la décomposition en série entière de f. Avec la question précédente, on retrouve le fait que $f'(0) = 1$. De plus, on sait que $f(0) = 0$, ce qui implique que a_0. Tous les termes d'ordre pair sont donc nuls, et pour tout $k \geq 3$ impair, $k = 2j+1$, on a

$$a_{2j+1} = (-1)^j \frac{2^j}{1.3\ldots(2j+1)}$$

Problème
Partie A - Théorème des valeurs intermédiaires.

On considère une fonction continue f définie sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$.

1. *Dichotomie.*
   (a) Montrons par récurrence que : (H_n) : $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2$. Pour $n = 0$, on étudie les deux cas possibles :
   – Soit $a_1 = (a+b)/2$ et $b_1 = b$. Comme $a \leq b$, on a alors $a_0 \leq a_1 \leq b_1 = b_0$ et $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$.
   – Soit $a_1 = a$ et $b_1 = (a+b)/2$. On a alors $a_0 = a_1 \leq b_1 \leq b_0$ et $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$.
   Dans les deux cas, on a bien $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$ et $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$. La propriété H_0 est donc vérifiée.

   Considérons maintenant un entier n pour lequel H_n est vérifiée. On a donc pour cet entier $a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b$ et $b_{n+1} - a_{n+1} = 2^{-n-1}(b-a)$. Étudions à nouveau les deux cas possibles.
   – Supposons dans un premier temps que $a_{n+2} = (a_{n+1} + b_{n+1})/2$ et $b_{n+2} = b_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, $a_{n+1} \leq b_{n+1}$ donc $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} = b_{n+1}$, et on remarque que $b_{n+2} - a_{n+2} = (b_{n+1} - a_{n+1})/2$.
   – Si on a $a_{n+2} = b_{n+1}$ et $b_{n+2} = (a_{n+1} + b_{n+1})/2$, on obtient de même $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1}$, et $b_{n+2} - a_{n+2} = (b_{n+1} - a_{n+1})/2$.
   Finalement, on a démontré que : $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1}$, et $b_{n+2} - a_{n+2} = (b_{n+1} - a_{n+1})/2$. La propriété H_{n+1} est donc vérifiée.

   Par le principe de récurrence, on peut conclure que (H_n) est vérifiée pour tout $n \geq 0$.
   (b) La suite (a_n) est donc une suite croissante et majorée par b (puisque pour tout n, $b_n \leq b$), et la suite (b_n) est décroissante et minorée par a. Elles sont donc toutes deux convergentes. Comme de plus, la limite de $(a_n - b_n)_n$ est nulle, les deux suites a_n et b_n admettent la même limite ℓ.
   (c) Pour tout n, on a $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$. La fonction f étant continue en ℓ, on sait que $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ convergent toutes deux vers $f(\ell)$. On a donc $f(\ell) \leq 0 \leq f(\ell)$: nécessairement, $f(\ell) = 0$.
   (d) La suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $1/2$. Si on souhaite une précision ϵ sur la valeur de ℓ, on choisira donc le nombre n d'itérations de l'algorithme de sorte que $2^{-n}(b-a) \leq \epsilon$, soit par exemple la partie entière de $1 + (\ln((b-a)/\epsilon)/\ln 2$.
   L'algorithme ci-dessous a été implémenté sur Algobox. Il ne nécessite pas pour fonctionner que a soit inférieur à b, mais que f prenne une valeur négative en a et positive en b.

```
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
epsilon EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "La fonction utilisée sera la fonction F1."
  AFFICHER "Entrer un réel où F1 est négative."
  LIRE a
  AFFICHER "Entrer un réel où F1 est positive."
  LIRE b
  AFFICHER "Entrer la précision souhaitée."
  LIRE epsilon
  SI (F1(a)<0 ET F1(b)>0) ALORS
    DEBUT_SI
    n PREND_LA_VALEUR max(floor(1+log(abs(b-a)/epsilon)/log(2)),1)
    POUR k ALLANT_DE 1 A n
      DEBUT_POUR
      SI (F1((a+b)/2)>0) ALORS
        DEBUT_SI
        b PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
        FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        a PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
        FIN_SINON
      FIN_POUR
    AFFICHER "F1 admet un zéro compris entre "
    AFFICHER a
    AFFICHER " et "
    AFFICHER b
    AFFICHER "."
    AFFICHER "L'algorithme a effectué "
    AFFICHER n
    AFFICHER " itérations."
    FIN_SI
  SINON
    DEBUT_SINON
    AFFICHER "Les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaires ne sont pas réunies."
    FIN_SINON
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée : F1(x)=cos(x)
```

2. Soit λ une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. En appliquant le résultat obtenu en A.1.c) à la fonction $f-\lambda$ si $f(a)<\lambda$, et à la fonction $\lambda-f$ sinon, on obtient le résultat souhaité.
3. Une fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$ prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.
4. Soit λ un réel. L'unicité de la solution de $f(x)=\lambda$ sur un intervalle $[a,b]$ est acquise si la fonction f est continue et monotone sur $[a,b]$. On aura ainsi existence et unicité de la solution de l'équation $f(x)=\lambda$ sur $[a,b]$ si f est continue et monotone sur $[a,b]$ et si λ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
5. Par exemple la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=x+1/2$ si $x\in[0,1/2]$ et par $f(x)=x-1/2$ si $x\in]1/2,1]$.
6. La fonction $x\mapsto sin(1/x)$ si $x\neq 0$ et valant 0 en 0 convient.
7. *Quelques applications.*
   (a) Considérons la fonction g définie sur $[a,b]$ par $g(x)=f(x)-x$. Cette fonction est continue et vérifie $g(a)=f(a)-a\geq 0$ car $f(a)$ appartient à $[a,b]$ donc $f(a)\geq a$. De la même façon

en b, $g(b) = f(b) - b \leq b$ car $f(b) \in [a, b]$. Il existe donc un réel c tel que $g(c) = 0$, ce qui équivaut à $f(c) = c$.

(b) La fonction g étant positive, on a pour tout $x \in [a, b]$,

$$g(x) \min_{[a,b]} f \leq f(x)g(x) \leq g(x) \max_{[a,b]} f$$

Si g n'est pas constamment nulle, le réel $(\int_a^b f(x)g(x)\ dx)/(\int_a^b g(x)\ dx)$ est donc compris entre le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$. L'ensemble $f([a, b])$ étant un intervalle, on en déduit que c'est une valeur prise par f, ce qui fournit le résultat.

Si g est constamment nulle sur $[a, b]$, tout réel c de $[a, b]$ convient.

Partie B - Théorème de Rolle

On considère dans cette partie une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$.

1. Rappelons que pour cette question $f(a) = f(b)$.
   (a) Soit $\alpha \in]a, b[$ le maximum de f sur $[a, b]$. Considérons un réel h non nul tel que $\alpha + h \in [a, b]$. Nécessairement, par choix de α, $f(\alpha + h)$ est inférieur à $f(\alpha)$ donc,

$$\begin{aligned} &- \text{si } h \text{ est positif,} \quad \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} \leq 0 \\ &- \text{si } h \text{ est négatif,} \quad \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} \geq 0 \end{aligned}$$

   On sait que la dérivée de f en α existe, donc on peut passer à la limite dans chacune de ces inégalités, lorsque h tend vers 0 par valeurs positives ou négatives.

   On obtient donc que $f'(\alpha) \leq 0 \leq f(\alpha)$. Donc nécessairement, $f(\alpha) = 0$.

   (b) Supposons f non constante sur $[a, b]$, avec $f(a) = f(b)$. Nécessairement f atteint soit son maximum sur $[a, b]$, soit son minimum sur $[a, b]$, en un point de $]a, b[$.

   On a vu dans la question précédente que si le maximum de f est atteint en un point de $]a, b[$, alors la dérivée de f en ce point est nulle : ce point convient donc.

   Si f atteint son minimum en un point de $]a, b[$, on peut remarquer que $-f$ atteint son maximum sur ce même point. La dérivée de $-f$ en ce point est alors nulle, ce qui implique que la dérivée de f en ce point est nulle.

   (c) Si f est constamment nulle sur $[a, b]$, sa dérivée est constamment nulle sur cet intervalle (rappelons que $a < b$), donc tout point de $]a, b[$ convient.

   (d) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ d'intérieur non vide, et dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point de $]a, b[$ de dérivée nulle.

2. On considère la fonction g définie sur $[a, b]$ par

$$g : x \mapsto f(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - x).$$

   Cette fonction vaut $f(b)$ en a et en b. Elle est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'après le théorème de Rolle, il existe alors un réel c de $]a, b[$ tel $g'(c) = 0$. Or, pour tout $x \in [a, b]$,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

   Le réel c vérifie donc $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$.

   Considérons la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère orthogonal. La dérivée de f représente la pente de la tangente en $(c, f(c)$ à $\mathcal{C}_f$. La quantité $(f(b) - f(a))/(b - a)$ est la pente de la corde de $\mathcal{C}_f$ entre les points a et b. Le théroème des accroissements finis affirme donc que si une fonction est continue sur un intervalle $[a, b]$ d'intérieur non vide, sa courbe représentative admet une tangente parallèle à la corde entre a et b.

3. Supposons que la dérivée de f sur $]a, b[$ soit bornée par une constante M. On a alors $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$. On peut également dire que pour tous points x et y de $[a, b]$, $|f(y)-f(x)| \leq M|y-x|$. C'est l'inégalité des accroissements finis.
4. Si la focntion f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors sa dérivée est continue donc bornée sur tout intervalle compact. Attention, demander que la fonction soit continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ ne suffit pas (penser par exemple à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$).

Partie C - Formules de Taylor

1. *Formule de Taylor-Young*
   (a) Par définition de la dérivée de f en a, le taux d'accroissement $(f(x)-f(a))/(x-a)$ tend vers $f'(a)$ lorsque x tend vers a. On en déduit que
   $$\frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{x-a}$$
   tend vers 0 lorsque x tend vers, ce qui s'écrit également
   $$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+o(x-a)$$
   (b) Supposons que la dérivée R' d'une fonction R soit négligeable devant $(x-a)^{n-1}$. Soit ϵ un réel strictement positif. Il existe δ tel que pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta]$, on a $|R'(x)| \leq \epsilon|x-a|^{n-1}$. On a alors en intégrant terme à terme : $|R(x)-R(a)| \leq \frac{\epsilon}{n}|x-a|^n$ ce qui signifie que $(r-r(a)$ (et on $R!$) est négligeable devant $(x-a)^n$.
   (c) Montrons par récurrence que sur n que, pour toute fonction f, n fois dérivable en a, la quantité
   $$R_{n,f}(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
   est négligeable devant $(x-a)^n$.
   La propriété est vraie au rang question C.1.a). On considère un entier n tel que, pour toute fonction f admettant une dérivée d'ordre n en a, on a $R_{n,f}$ négligeable devant $(x-a)^n$.
   Soit f une fonction admettant une dérivée d'ordre $n+1$ en a.
   La fonction f' admet alors une dérivée d'ordre n en a donc $R_{n,f'}$ est négligeable devant $(x-a)^n$. Par ailleurs, $R_{n,f'}=(R_{n+1}(f))'$ est négligeable devant $(x-a)^{n+1}$.
   Ainsi, on a démontré que, pour toute fonction f admettant une dérivée d'ordre $(n+1)$, on a $R_{n+1,f}$ négligeable devant $(x-a)^{n+1}$.
   Par le principe de récurrence, on peut alors conclure que, pour toute fonction f admettant une dérivée d'ordre n, $R_{n,f}$ est négligeable devant $(x-a)^n$.
2. *Formule de Taylor avec reste intégral.*
   (a) Montrons pas récurrence que toute fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ vérifie l'égalité proposée.
   Pour $n=0$: f est continument dérivable, donc f est une primitive de sa dérivée.
   Soit n un entier tel que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, la formule de Taylor avec reste intégral soit vérifiée.
   Considérons une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Sa dérivée f' est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et vérifie donc : pour tout t,
   $$f'(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(t-a)^k}{k!}(f')^{(k)}(a)+\int_a^t (f')^{(n+1)}(x)\frac{(t-x)^n}{n!}\,dx$$

Intégrons cette égalité entre a et b : il vient

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} \int_a^b (t-a)^k \, dt + \int_a^b \left(\int_a^t (f')^{(n+1)}(x) \frac{(t-x)^n}{n!} \, dx \right) \, dt$$

Pour tout k, une primitive de $t \mapsto (t-a)^k$ étant $t \mapsto (t-a)^{k+1}/(k+1)$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} \int_a^b (t-a)^k \, dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (b-a)^{k+1}$$

Pour traiter le dernier terme, intervertissons les intégrales (intégrales d'une fonction continue sur un pavé borné) :

$$\int_a^b \left(\int_a^t f^{(n+2)}(x) \frac{(t-x)^n}{n!} \, dx \right) \, dt = \int_a^b \left(\int_x^b f^{(n+2)}(x) \frac{(t-x)^n}{n!} \, dt \right) \, dx = \int_a^b f^{(n+2)}(x) \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \, dx$$

D'où le résultat. Le principe de récurrence permet ensuite de conclure que la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n est vérifiée par toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

(b) Si $a \leq b$, la fonction $t \mapsto (b-t)^n$ est positive sur l'intervalle $[a, b]$, donc, d'après la question A.7., il existe un réel $\xi \in [a, b]$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} (b-a)^k f^{(k)}(a) + f^{(n+1)}(\xi) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Le cas où $a > b$ se traite de façon similaire, la fonction $t \mapsto (b-t)^n$ restant de signe constant sur l'intervalle $[a, b]$.

(c) Considérons la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle et on a, pour tout $x > -1$,

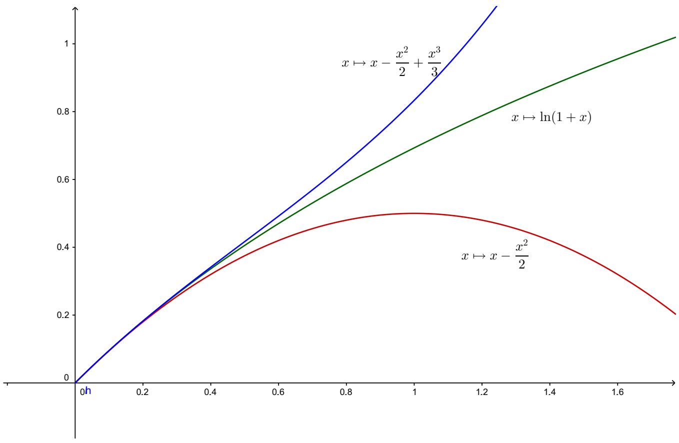
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

En particulier, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$ et $f^{(3)}(0) = -2$.
Soit x un réel positif. On applique la formule de Taylor-Lagrange à f entre 0 et x, à l'ordre 3 et à l'ordre 4 : il existe ξ_3 et ξ_4 dans l'intervalle $[0, x]$ tels que

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3(1+\xi_3)^3}x^3 \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 - \frac{1}{4(1+\xi_3)^4}x^4 \end{aligned}$$

Le réel x étant positif, on en déduit que

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$



On constate que l'approximation est très bonne pour x compris entre 0 et 0.2, et n'a plus aucun intérêt au delà de 1. Pour x négatif, l'inégalité s'inverse...

(d) On se place dans un voisinage de 0. Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On écrit la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n : il existe ξ_x tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k f^{(k)}(0) + f^{(n+1)}(\xi_x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, sa dérivée est bornée dans un voisinage de 0. On en déduit alors que

$$\frac{1}{x^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k f^{(k)}(0)\right)$$

tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

(e) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ s'annulant en a et donc la dérivée $n^{\text{ième}}$ en a est non nulle. On peut supposer que n est le plus petit entier tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. On a alors

$$f(x) = f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o((x-a)^n)$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe δ tel que pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta]$,

$$\left| f(x) - f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \right| \leq \epsilon$$

ou encore

$$\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} - \epsilon\right)(x-a)^n \leq f(x) \leq \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \epsilon\right)(x-a)^n$$

Si on choisit ϵ strictement inférieur à $|f^{(n)}(a)|/n!$, on obtient que, dans l'intervalle $[a-\delta, a+\delta]$, f ne s'annule qu'en a.

(f) On peut montrer par récurrence que la dérivée $n^{\text{ième}}$ sur $\mathbb{R}^*$ de cette fonction est de la forme $x \mapsto e^{-1/x^2}x^{-3n}(P(x)\sin(x^{-1}) + Q(x)\cos(x^{-1}))$, où P et Q sont des polynômes. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}*$, et la continuité de chacun des dérivées en 0 implique qu'elle est bien de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée de tout ordre nulle en 0.

Cette fonction s'annule si et seulement si $x = 0$ ou $\sin(1/x) = 0$, c'est à dire $x = 1/(k\pi)$ avec k entier relatif non nul.

Les réels de la forme $1/(k\pi)$ (avec $k \in \mathbb{Z}^*$) sont donc des zéros isolés, mais 0 n'est pas un zéro isolé, puisque tout intervalle ouvert contenant 0 contient une infinité de réels de la forme $1/(k\pi)$.

3. Soit $f : x \mapsto x - \ln x$ sur $]0, +\infty[$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle et on a, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 - 1/x$ et $f''(x) = 1/x^2$. Par la formule de Taylor avec reste intégral (par exemple...), on a :
$$x - \ln x = 1 + \int_1^x (x-t)\frac{dt}{t^2}$$
Si $x > 1$, $(x-t)$ est positif pour tout $t \in [1, x]$, donc l'intégrale est positive.
Si $x \in]0, 1]$, $(x-t)$ est négatif pour tout $t \in [x, 1]$, donc l'intégrale est bien à nouveau positive.
On en déduit que $x - \ln x - 1$ est positif pour tout $x > 0$, donc on peut l'écrire comme le carré d'une fonction ϕ. Ainsi, on considère une fonction ϕ telle que pour tout x, $\phi^2(x) = x - \ln x - 1$.
On a nécessairement $\phi(1) = 0$ et, pour tout $x > 0$,
$$2\phi(x)\phi'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$
Si on souhaite que la fonction ϕ soit continue, on a deux choix principaux : soit $\phi(x) = \sqrt{x - \ln x - 1}$ ou $\phi(x) = \mathrm{sgn}(x-1)\sqrt{x - \ln x - 1}$.
Avec le premier choix, la fonction ϕ n'est pas dérivable en 1 (les dérivées à droite et à gauche ne coïncident pas) ; cette fonction n'est pas bijective (mais elle l'est de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}+$ et de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}^+$.)
Avec le second choix, la fonction ϕ est dérivable en 1, de dérivée $1/\sqrt{2}$ (faire un développement limité à l'ordre 2). Cette fonction est bijective de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

4. *Méthode de Newton.*
   (a) La tangente en $(x_n, f(x_n)$ à la courbe représentative de f est la droite d'équation $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. Si $f'(x_n)$ est non nul, le point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses est le point de coordonnées $(x_n - f(x_n)/f'(x_n), 0)$. C'est donc bien le point de coordonnées $(x_{n+1}, 0)$.

   (b) La formule de Taylor-Lagrange s'écrit : il existe un réel ξ_x compris entre α et x tel que
$$f(\alpha) - f(x) = (\alpha - x)f'(x) + f''(\xi_x)\frac{(\alpha - x)^2}{2}$$

   (c) Puisque $f(\alpha) = 0$, on en déduit qu'il existe un réel ξ_x compris entre x et α tel que
$$\frac{f(x)}{f'(x)} = -(\alpha - x) - \frac{f''(\xi_x)}{2f'(x)}(\alpha - x)^2$$

   (d) On remplace x par x_n : il existe un réel ξ_n compris entre α et x_n tel que
$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -(\alpha - x_n) - \frac{f''(\xi_x)}{2f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2$$
   C'est-à-dire que
$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{f''(\xi_x)}{2f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2$$
   Si M est un majorant de $|f''|$ et $m > 0$ un minorant de $|f'|$, on a
$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{M}{2m}|x_n - \alpha|^2$$

   (e) On pose $K = M/2m$. Le résultat ci-dessus s'écrit, pour tout $n \geq 0$,
$$K|x_{n+1} - \alpha| \leq |K(x_n - \alpha)|^2$$
   On montre alors par une récurrence triviale que, pour tout n,
$$K|x_n - a| \leq (K|x_0 - \alpha|)^{2^n}$$

(f) La convergence est ici extrêmement rapide à partir du moment où on sait que $K|x_0 - \alpha|$ est strictement inférieur à 1. En effet, si par exemple $K|x_0 - \alpha| = 0.1$, cela signifie qu'en 10 itérations, $K(x_n - \alpha)$ sera inférieur à $0.1^{2^{10}}$, soit 10^{-1024}, alors qu'avec l'algorithme de dichotomie, 10 itérations divisent l'intervalle d'étude par environ 1000 ! Néanmoins, si on part d'un point x_0 qui n'est pas suffisamment proche de α (ou si f' s'annule en α, ou en l'un des x_n), l'algorithme ne fonctionne pas et peut diverger. Avoir une inégalité du type $|u_{n+1}| \leq |u_n^2|$ n'implique pas que la suite (u_n) converge vers 0 : la suite $(n!)$ vérifie une telle inégalité !

Partie D : Majoration de l'erreur dans un calcul numérique d'intégrale.

On se donne une fonction f continue sur l'intervalle $[0, 1]$. On note, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

1. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et on note, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt.$$

   (a) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, F est de classe $\mathcal{C}^2$.

   (b) On a

$$F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} + \int_{k/n}^{(k+1)/n} f'(t)\left(\frac{k+1}{n} - t\right)\ dt$$

   (c) On somme les égalités pour k entre 0 et $(n-1)$:

$$F(1) - F(0) = S_n(f) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f'(t)\left(\frac{k+1}{n} - t\right)\ dt$$

   (d) On majore dans chacune des intégrales $\frac{k+1}{n} - t$ par $1/n$. Il vient

$$\left|\int_0^1 f(t)\ dt - S_n(f)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} |f'(t)|\ dt \leq \frac{1}{n}\max_{[0,1]}|f'|$$

   donc $M = 1$ convient.

   (e) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$. Sa dérivée est égale à $x \mapsto -2xe^{-x^2}$, et sa dérivée seconde est égale à $x \mapsto 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$. La dérivée seconde s'annule en $x = 1/\sqrt{2}$, donc la dérivée première atteint son minimum en $x = 1/\sqrt{2} \in [0, 1]$. On a donc $\max|f'| = \sqrt{2}e^{-1/2} \simeq 0.8578$

   Il faut choisir $n \geq \max|f'|/\epsilon$, soit $n \geq 858$.

2. On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$.

   (a) En écrivant la formule de Taylor à l'ordre 2, il vient : pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f''(t)\left(\frac{k+1}{n} - t\right)^2\ dt$$

   En sommant ces égalités sur k, on obtient la relation $(*)$.

(b) La somme étudiée dans cette question coïncide avec $S_n(f')$. Appliquons le résultat de la question D.1.d) à la fonction f' :

$$\left|\int_0^1 f'(t)\ dt - S_n(f')\right| \leq \frac{1}{n} \max|f'|$$

donc

$$S_n(f') = f(1) - f(0) + o\,(1)$$

(c) On majore la somme des intégrales comme précédemment :

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\frac{k+1}{n} - t\right)^2 f''(t)\ dt\right| \leq \max_{[0,1]} |f''| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3n^3} = \frac{1}{3n^2} \max_{[0,1]} |f''|$$

Puis :

$$F(1) - S_n(f) = \frac{f(1) - f(0) + o(1)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\ dt - \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

La vitesse de convergence de (S_n) vers l'intégrale de f sur $[0,1]$ est donc bien en $1/n$ si $f(0) \neq f(1)$ (et elle est au moins en $1/n^2$ si $f(0) = f(1)$).