M1 MEEF 2nd degré, CAPES de Mathématiques
Préparation à l'écrit S1 (UE MAT1261M)
Écrit blanc du 28 septembre 2017

Merci de rédiger sur deux copies différentes les parties géométrie et analyse !

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. Les calculatrices, ainsi que tout document sont interdits.

Analyse

Exercice 1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$ par $g(x) = (2+3x)/(4+x)$ et la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et par la relation : pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Étudier la fonction g (ensemble de définition, ensemble image, tableau de variation, limites,...) et donner l'allure de sa courbe représentative.
2. On suppose pour cette question que $u_0 = -18/7$. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?
3. **On se place dorénavant dans le cas où u_0 est un réel positif.** Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
4. Montrer que si u_0 est différent de 1, alors, pour tout $n \geq 0$, u_n est différent de 1.
5. Montrer que si $0 \leq u_0 < 1$, on a $1 > u_1 > u_0$ et si $u_0 > 1$, alors $1 < u_1 < u_0$.
6. Étudier la monotonie éventuelle de la suite (u_n) en fonction de la valeur de u_0. *On pourra raisonner par récurrence.*
7. Étudier la convergence éventuelle de la suite (u_n) et, le cas échéant, déterminer sa limite.
8. Montrer également que, si u_0 est différent de 1, la suite (v_n) définie par pour tout n par $v_n = (2+u_n)/(1-u_n)$ est géométrique. Étudier la limite de (v_n) en fonction de la valeur de u_0 et retrouver celle de (u_n).

Exercice 2.

Dans ce problème, on redémontre plusieurs résultats fondamentaux de l'analyse réelle, en particulier la convergence des suites croissantes majorées et le théorème des valeurs intermédiaires. Il est donc fondamental de ne pas supposer ces résultats connus !

Dans l'ensemble de ce problème, on se donne deux réels a et b, avec $a < b$ et on note $I = [a, b]$.

1. **Comportement asymptotique des suites croissantes.**
   On rappelle que toute partie de $\mathbb{R}$ majorée admet une borne supérieure, et que ce réel est caractérisé de la façon suivante : le réel M est la borne supérieure de $A \subset \mathbb{R}$ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
   — A est inclus dans $]-\infty, M]$
   — Pour tout réel $\epsilon > 0$, $A \cap [M-\epsilon, M]$ est non vide.

   (a) On considère une suite croissante (u_n) et on suppose qu'elle est majorée. En utilisant la caractérisation de la borne supérieure de $\{u_n, n \geq 0\}$, montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est égale à $\sup_n u_n$.

   (b) Montrer que si une suite (u_n) est croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

   (c) Donner un exemple de suite convergente non monotone.

2. Justifier que toute suite convergente est bornée. Exhiber une suite bornée non convergente.
3. **Théorème de Bolzano-Weierstrass.** Le but de cette question est de démontrer que, de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.
   Soit (u_n) une suite à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$.
   (a) On construit deux suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante : $a_0 = a$ et $b_0 = b$, puis, pour tout $n \geq 0$,
   — Si l'intervalle $[a_n, (a_n + b_n)/2]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n), on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$.
   — Sinon, on pose $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$.
   Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, on a
   $$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$
   (b) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.
   (c) Montrer que la fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ construite de la façon suivante :
   $$\phi(0) = 0 \text{ et, pour tout } n \geq 0,\ \phi(n+1) = \inf\{k > \phi(n), u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$$
   est bien définie et strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
   (d) Justifier que la suite $(u_{\phi(n)})$ est convergente.
   (e) Conclure.
   (f) Quel est le nom de la méthode algorithmique décrite dans la question (3.a) ?
4. Donner un exemple de suite (x_n) admettant une limite finie ℓ et de fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(\ell)$.
5. Montrer que si f est une fonction continue définie sur l'intervalle $[a, b]$ et si (u_n) est une suite de $[a, b]$, convergeant vers un réel $\ell \in [a, b]$, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.
6. **Théorème des bornes**. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, a et b étant deux réels fixés. On note $M = \sup_{[a,b]} f$.
   (a) Justifier l'existence d'une suite (x_n) de $[a, b]$ telle que $(f(x_n))$ converge vers M.
   (b) Montrer (en appliquant l'un des théorèmes précédemment démontrés) que (x_n) admet une sous-suite convergente, de limite notée $\alpha \in [a, b]$. Que peut-on dire de $f(\alpha)$?
   (c) En déduire le théorème des bornes (qui stipule que toute fonction continue sur un intervalle admet un maximum et un minimum).
7. **Théorème des valeurs intermédiaires**. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.
   (a) On suppose pour cette question que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Construire une suite d'intervalles $([a_n, b_n])$ dont la longueur tend vers 0 et vérifiant pour tout n : $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ et $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Étudier la limite des suites (a_n) et (b_n) et en déduire l'existence d'un réel $c_0 \in [a, b]$ tel que $f(c_0) = 0$.
   (b) Montrer maintenant que pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c_λ de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c_\lambda) = \lambda$.
   (c) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
   (d) Montrer en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires ainsi que le théorème des bornes que $f([a, b])$ est un intervalle.

(e) *Pour cette question, une représentation graphique des fonctions demandées peut suffire.* Donner un exemple de fonction f définie sur un intervalle I telle que $f(I)$ ne soit pas un intervalle, et donner un exemple de fonction $\tilde{f}$ définie sur un intervalle I, non continue sur I, telle que $\tilde{f}(I)$ soit un intervalle.

8. **Intégration : méthode des rectangles...** et un peu plus. Soit f une fonction continue, croissante et positive sur l'intervalle $[a, b]$ et soit n un entier naturel non nul. On admet l'existence de l'intégrale de f sur $[a, b]$, notée A, et pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on note $t_k = a + k(b-a)/n$. On définit alors U_n, V_n et T_n par :

$$U_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \qquad V_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \qquad T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(t_k)+f(t_{k+1})}{2}$$

(a) Sur un graphique sur lequel vous aurez fait figurer la courbe représentative d'une fonction f satisfaisant aux hypothèses, représenter des domaines du plan d'aire respectivement A, U_3, V_3 et T_3.

(b) Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a, pour tout $t \in [t_k, t_{k+1}]$,

$$f(t_k) \leq f(t) \leq f(t_{k+1})$$

et en déduire que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\frac{b-a}{n} f(t_k) \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\, dt \leq \frac{b-a}{n} f(t_{k+1})$$

(c) Montrer que $U_n \leq A \leq V_n$ et calculer $V_n - U_n$.

(d) Expliciter une constante c_f, indépendante de n, telle que

$$A - \frac{c_f}{n} \leq U_n \leq A \qquad \text{et} \qquad A \leq V_n \leq A + \frac{c_f}{n}$$

(e) En déduire que les deux suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et donner la valeur de leur limite. Montrer également que (T_n) converge vers cette limite.

(f) *Application.* On considère la fonction $f : x \mapsto e^x$ sur l'intervalle $[a, b] = [1, 2]$. Calculer $A = \int_1^2 e^t\, dt$ et, pour tout $n \geq 1$, exprimer U_n et V_n en fonction de n. Donner un développement limité à l'ordre 1 de (U_n) et de (V_n).

9. **Intégration : méthode des trapèzes.** On suppose dorénavant que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et on utilise les mêmes suites (T_n), (U_n) et (V_n) que dans la question précédente. On considère deux réels α et β de l'intervalle $[a, b]$ tels que $\alpha < \beta$ et on note M_2 le maximum de $|f''|$ sur $[a, b]$ et h et ϕ les fonctions définies sur $[\alpha, \beta]$ par

$$h(x) = f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) \qquad \text{et} \qquad \phi(x) = \frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)$$

(a) En faisant appel à une double intégration par partie, montrer que

$$\int_\alpha^\beta \phi(x)(f''(x) - h''(x))\, dx = \int_\alpha^\beta \phi''(x)(f(x) - h(x))\, dx$$

(b) En déduire que

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\, dx - (\beta - \alpha)\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \right| \leq M_2 \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}$$

(c) En appliquant le résultat précédent à chacun des intervalles $[t_k, t_{k+1}]$, montrer que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - T_n \right| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Partiel du 28 septembre 2017

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – *Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.*

1.– *Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine. Montrer que si $Fix\ f$ est non vide, alors c'est un sous-espace affine de E.*

2.– *Soit $O \in E$. Montrer que tout élément $f \in GA(E)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $f = t \circ g$ où t est une translation et g un élément de $GA(E)$ qui fixe O.*

3.– *Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine bijective. Montrer que f^{-1} est affine.*

4.– *Soit g une application affine. On suppose que $g \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$. Montrer que $\overrightarrow{u} \in Ker(\overrightarrow{g} - \overrightarrow{id})$.*

5.– *Soient $h_{I,k}$ (resp. $h_{J,k^{-1}}$) l'homothétie de centre $I \in E$ (resp. $J \in E$) et de rapport $k > 0$ (resp. k^{-1}). Montrer que $h_{I,k} \circ h_{J,k^{-1}}$ est une translation de vecteur $(k-1)\overrightarrow{IJ}$. On admettra que les applications affines dont la partie linéaire est l'identité sont des translations.*

Le problème. – *(10 pts) On note E un espace affine de dimension deux ou trois et $\overrightarrow{E}$ sa direction.*

Première partie : les involutions linéaires.– *On note $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \longrightarrow \overrightarrow{E}$ une application linéaire involutive c'est-à-dire telle que $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{id}$. On pose $\overrightarrow{G} = \ker(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id})$ et $\overrightarrow{F} = \ker(\overrightarrow{f} + \overrightarrow{id})$.*

1) i) Montrer que $\overrightarrow{G} \cap \overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{0}\}$.

2) i) Montrer que $(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id}) \circ (\overrightarrow{f} + \overrightarrow{id}) = (\overrightarrow{f} + \overrightarrow{id}) \circ (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{id}) = 0$.
ii) Soit $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$. On note

$$\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x} \quad et \quad \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x}$$

Montrer que $\overrightarrow{x_1} \in \overrightarrow{G}$ et $\overrightarrow{x_2} \in \overrightarrow{F}$.

3) Montrer que $\overrightarrow{x}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_2}$ et en déduire que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$.

4) Est-il possible d'avoir $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F}$? Ou $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{G}$?

5) On décompose tout point $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$ en $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{G}$. Écrire $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$. Dans le cas où $\overrightarrow{E} \neq \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{E} \neq \overrightarrow{G}$ on dit $\overrightarrow{f}$

est la symétrie vectorielle par rapport à $\overrightarrow{F}$ *et de direction* $\overrightarrow{G}$.

Seconde partie : les symétries affines.– *Soient* $\overrightarrow{F}$ *et* $\overrightarrow{G}$ *deux sous-espaces vectoriels non réduits à* $\{0\}$ *de* $\overrightarrow{E}$ *et tels que* $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$. *On note* F *et* G *deux sous-espaces affines de* E *de directions* $\overrightarrow{F}$ *et* $\overrightarrow{G}$.

1) Soient I *et* J *deux points quelconques tels que* $I \in F$ *et* $J \in G$. *On note* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *les composantes du vecteur* $\overrightarrow{IJ}$ *dans* $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$, *i. e.* $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ *avec* $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ *et* $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{G}$. *On pose* $P = I + \overrightarrow{u} \in F$ *et* $Q = J - \overrightarrow{v} \in G$.
i) Montrer que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$ *et en déduire que* $F \cap G$ *contient au moins un point.*
ii) Montrer en raisonnant par l'absurde que $F \cap G$ *ne contient qu'un point.*

2) Soient M *et* N *deux points de* E. *On note* P *(resp.* Q*) l'unique point d'intersection de* F *et de* $M + \overrightarrow{G}$ *(resp. de* F *et de* $N + \overrightarrow{G}$*).*
i) Déterminer les composantes $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ *et* $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{G}$ *de* $\overrightarrow{MN}$ *en fonction de* M, N, P *et* Q.
ii) En déduire que $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{QN}$ *où* $\overrightarrow{s}$ *est la symétrie vectorielle par rapport à* $\overrightarrow{F}$ *et de direction* $\overrightarrow{G}$.

3) Si $M \in E$, *on définit le symétrique de* M *par rapport à* F *et de direction* $\overrightarrow{G}$ *comme étant le point* $M' = P + \overrightarrow{MP}$ *où* P *est l'unique point d'intersection de* F *et de* $G = M + \overrightarrow{G}$. *Montrer que l'application* s *qui a tout point* $M \in E$ *associe son symétrique* $M' = s(M)$ *par rapport à* F *et de direction* $\overrightarrow{G}$ *est affine.*

4) i) Soit $M \in F$. *Montrer que* $s(M) = M$ *et en déduire que* $F \subset Fix\ s$.
ii) Soit $M \in Fix\ s$. *Montrer que* $M \in F$ *et déduire que* $Fix\ s = F$.

5) Soit $f : E \longrightarrow E$ *une application affine dont l'application linéaire associée* $\overrightarrow{f}$ *est la symétrie vectorielle* $\overrightarrow{s}$ *par rapport à* $\overrightarrow{F}$ *et de direction* $\overrightarrow{G}$. *On veut montrer que* f *n'est pas nécessairement une symétrie affine.*
i) Soient $O \in F$ *et* $O' = f(O)$. *Montrer que pour tout* $M \in E$ *on a* $f(M) = O' + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{OM})$
ii) Montrer que $M \in Fix\ f \iff 2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OO'}$.
iii) On suppose désormais que $O' \in F$ *et que* $O' \neq O$. *Montrer que* $Fix\ f = \emptyset$ *et en déduire que* f *n'est pas une symétrie affine.*
iv) Reconnaître f *dans ce cas et donner son nom.*