Correction de l'Écrit blanc d'analyse du 28 septembre 2017

Exercice 1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$ par $g(x) = (2+3x)/(4+x)$ et la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et par la relation : pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

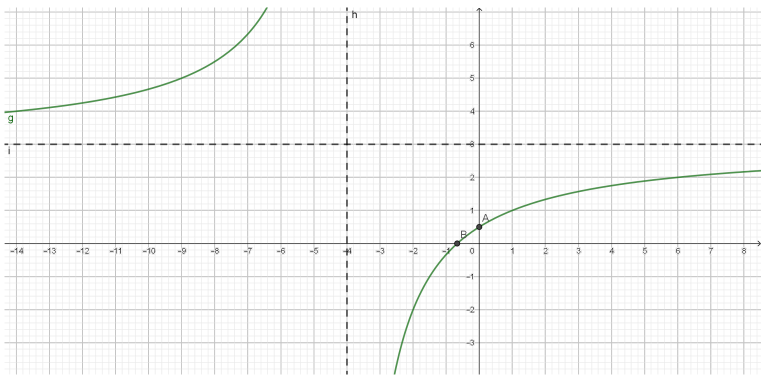
1. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$. Pour tout réel x différent de -4, on a

$$g(x) = 3 - \frac{10}{4+x}$$

Donc, pour tout x, $g(x)$ est différent de 3 : $g(\mathbb{R}\backslash\{-4\}) = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.
De plus g est croissante sur $]-\infty, -4[$ et sur $]-4, +\infty[$ (car $x \mapsto 1/(4+x)$ est décroissante, ou alors par positivité de la dérivée de g), et on a $\lim_{-\infty} g = \lim_{+\infty} g = 3$. Lorsque x tend vers -4 par valeurs inférieures : $2+3x$ tend vers -10 et $4+x$ tend vers 0 en restant négatif. On en déduit que $\lim_{x \to -4, x<-4} g(x) = +\infty$. On montre également que $\lim_{x \to -4, x>-4} g(x) = -\infty$.
On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$g(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3

Avant de tracer la courbe : on remarque que $g(0) = 1/2$ et $g(-2/3) = 0$, et on place les asymptotes.



2. On remarque que $g(-18/7) = -4$. On a donc $u_1 = -4$, et les termes suivants ne sont pas définis.

3. D'après le tableau de variation de g, $g(\mathbb{R}^+) = [\frac{1}{2}, 3[\subset \mathbb{R}^+$. On en déduit que $\mathbb{R}^+$ est un intervalle stable par g, ce qui, par une récurrence triviale, justifie le fait que la suite (u_n) est alors bien définie.

4. La fonction g est bijective de $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$ vers $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on a $g^{-1} : y \mapsto -4 + \frac{10}{3-y}$, donc le seul antécédent de 1 est égal à 1. On a donc, $x \neq 1 \Longrightarrow g(x) \neq 1$.
Par une récurrence évidente, on en déduit que si u_0 est différent de 1, alors, pour tout $n \geq 0$, $u_n \neq 1$ (et on peut montrer aussi que, si $u_0 = 1$ alors, pour tout n, $u_n = 1$).

5. La fonction g étant croissante, si $u_0 < 1$, on a $u_1 = g(u_0) < g(1) = 1$. De même, si $u_0 > 1$, $u_1 > 1$.

Pour tout x positif, étudions maintenant le signe de $g(x) - x$:

$$g(x) - x = \frac{2+3x}{4+x} - x = \frac{2-x-x^2}{4+x} = \frac{-(x-1)(x+2)}{4+x}$$

Puisqu'on se place sur $\mathbb{R}^+$, il nous suffit de connaître le signe de $x-1$: $g(x)-x$ est donc strictement positif pour tout $x \in [0,1[$ et strictement négatif pour tout $x \in]1,+\infty[$.
Pour résumer : on aura donc, si $u_0 \in [0,1[$, $u_0 < u_1 < 1$ et si $u_0 \in]1,+\infty[$, $u_0 > u_1 > 1$.

6. Soit $u_0 \in [0,1[$. Nous allons montrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante, et pour prendre un peu d'avance sur l'énoncé, que, pour tout n, $u_n < 1$.
L'hypothèse de récurrence au rang n est donc : $H_n : u_n < u_{n+1} < 1$.
Initialisation : on vient de voir que $u_0 < u_1 < 1$, donc H_0 est vérifiée.
Hérédité : Soit $n \geq 0$ un entier tel que $u_n < u_{n+1} < 1$.
La fonction g étant strictement croissante, on conserve les inégalités lorsque l'on compose par g. Ainsi, il vient : $g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1)$, ce qui peut s'écrire : $u_{n+1} < u_{n+2} < 1$.
La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion. Par principe de récurrence, on peut conclure que, pour tout n, on a $u_n < u_{n+1} < 1$ dès que $u_0 \in [0,1[$, ce qui signifie notamment que la suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 1.
De façon similaire, on peut montrer que, si u_0 appartient à $]1,+\infty[$, la suite (u_n) est strictement décroissante et minorée par 1 (et que si $u_0 = 1$, elle est constante).
7. La suite (u_n) est monotone et bornée, donc elle est convergente. Notons ℓ sa limite. Nécessairement, ℓ appartient à $\mathbb{R}^+$, et, g étant continue sur $\mathbb{R}^+$, on a
$$\ell = \lim u_{n+1} = \lim g(u_n) = g(\lim u_n) = g(\ell)$$
Cherchons les réels x positifs et solutions de l'équation $g(x) = x$: si x est un tel réel, on a $g(x) - x = 0$, ce qui équivaut à $2 - x - x^2 = 0$. Le seul réel positif solution de cette équation est donc 1. On a donc $\lim_n u_n = 1$ dès que $u_0 \geq 0$.
8. On suppose que $u_0 \neq 1$, ce qui implique que, pour tout n, $u_n \neq 1$. La suite (u_n) est donc bien définie et pour tout n, on a $u_n \neq 1$.
On a alors :
$$v_{n+1} = \frac{2+u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{8+2u_n+2+3u_n}{4+u_n-2-u_n} = \frac{5}{2}\,\frac{2+u_n}{1-u_n} = \frac{5}{2}v_n$$
La suite (v_n) est donc géométrique de raison $(5/2)$: cette suite est donc croissante en valeur absolue. Si $u_0 \in [0,1[$, on remarque que v_0 est strictement positif donc (v_n) est strictement croissant et tend vers $+\infty$. Si $u_0 \in]1,+\infty[$, (v_n) est strictement décroissante et tend vers $-\infty$.
Pour tout n, on peut exprimer u_n et fonction de v_n : $u_n = (v_n - 2)/(v_n + 1)$. On retrouve ainsi que (u_n) tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2.

1. **Comportement asymptotique des suites croissantes.**
   (a) Soit (u_n) une suite croissante majorée. On note $M = \sup_n u_n$.
   Soit ϵ un réel strictement positif.
   Par la caractérisation de la borne supérieure de $\{u_n, n \geq 0\}$, il existe N tel que $u_N \in]M-\epsilon, M]$.
   Or la suite (u_n) est croissante, donc pour tout $n \geq N$, on a $u_n \in]M-\epsilon, M]$, ce qui implique que $|u_n - M| \leq \epsilon$.
   On obtient ainsi que la suite (u_n) converge, et que sa limite est égale à M.

(b) Soit (u_n) une suite croissante non majorée.
Soit A un réel fixé. La suite (u_n) étant non majorée, il existe N tel que $u_N \geq A$.
Or la suite (u_n) est croissante donc, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N \geq A$.
On peut alors conclure que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

(c) Soit (u_n) une suite convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$.
On applique la définition de la limite avec $\epsilon = 1$ (ou toute autre valeur).
Il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq 1$.
Ceci implique que, pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq |\ell| + 1$.
Notons alors $M = \max(\max\{|u_k|, k \leq N\}, |\ell| + 1)$.
On a, pour tout n, $|u_n| \leq M$: M est un majorant de la suite (u_n).

(d) La suite $((-1)^n/n)_{n\geq 1}$ est convergente et non monotone.

2. **Théorème de Bolzano-Weierstrass.**
Soit (u_n) une suite à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$.

(a) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n la propriété suivante :

$$(H_n) \qquad a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

Nous allons montrer par récurrence que H_n est vérifiée pour tout n.
Initialisaton .Pour $n = 0$: par construction, on a $(a_1, b_1) = ((a_0 + b_0)/2, b_0)$ ou $(a_1, b_1) = (a_0, (a_0 + b_0)/2)$. Or par hypothèse, $a_0 \leq b_0$, donc on a bien $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$ et $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(a_0 - b_0)$
Hérédité. Soit maintenant n un entier tel que H_n est vérifié.
On a $(a_{n+2}, b_{n+2}) = ((a_{n+1} + b_{n+1})/2, b_{n+1})$ ou $(a_{n+2}, b_{n+2}) = (a_{n+1}, (a_{n+1} + b_{n+1})/2)$. Dans les deux cas, on aura $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1}$ et $b_{n+2} - a_{n+2} = \frac{1}{2}(b_{n+1} - a_{n+1})$.
Conclusion. On conclut donc que, si H_n est vérifiée, alors H_{n+1} l'est également. D'où, par principe de récurrence, H_n est vérifiée pour tout entier naturel n.
NB : Pour montrer que la suite $(b_n - a_n)_n$ est géométrique, on n'a pas utilisé l'hypothèse de récurrence : c'est juste plus pratique de le faire comme ça que de redétailler les deux cas !

(b) La suite (a_n) est croissante et majorée par b_0 : elle est donc convergente. De même, la suite (b_n) est décroissante et minorée par a_0, donc elle converge également. Comme la suite $(b_n - a_n)_n$ est géométrique de raison $1/2$, elle tend vers 0, donc les suites (a_n) et (b_n) admettent la même limite.

(c) Pour tout n, $\phi(n)$ est définie comme l'infimum d'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$: on va prouver que, à chaque itération, l'ensemble en question est non vide, ce qui suffit (toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet en effet un plus petit élément).
Notons $I_n = \{k \geq 0, u_k \in [a_n, b_n]\}$.
On démontre par récurrence que I_n est infini et que ϕ est bien définie.
$\phi(0)$ est bien définie et $[a_0, b_0] = [a, b]$ contient tous les termes de la suite (u_k), donc $I_0 = \mathbb{N}$.
Soit n un entier tel que $\phi(n)$ est bien défini et tel que I_n est infini. $\phi(n + 1)$ sera bien défini si on peut prouver que l'ensemble $I_{n+1} \cap [\phi(n) + 1, +\infty[$ est non vide : on va montrer que l'ensemble I_{n+1} est infini, ce qui est tout à fait suffisant.
On étudie les deux cas :

— Si $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = (a_n+b_n)/2$: alors l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, (a_n+b_n)/2]$ contient par construction une infinité de terme de la suite $(u_k)_{k\geq 0}$: I_{n+1} est infini et l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient au moins un (mais en fait aussi une infinité) terme de la suite $(u_k)_{k>\phi(n)}$. On conclut que l'ensemble $I_{n+1} \cap [\phi(n)+1, +\infty[$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément.

— Si $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$: l'intervalle $[a_n, (a_n + b_n)/2]$ ne contient pas une infinité de termes de la suite $(u_k)_{k\geq 0}$. Or l'intervalle $[a_n, b_n]$ contient par hypothèse une infinité de termes de la suite (u_k), donc l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [(a_n + b_n)/2, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite (u_k). A nouveau, cela suffit pour conclure que l'ensemble $I_{n+1} \cap [\phi(n)+1, +\infty[$ est infini donc non vide, et que $\phi(n+1)$ est bien défini.

Conclusion. Par principe de récurrence, on peut conclure que ϕ est bien définie sur $\mathbb{N}$ et est strictement croissante.

(d) Notons que la suite $(u_{\phi(n)})$ est une sous-suite de la suite (u_n) car ϕ est strictement croissante.

Par construction de la suite ϕ, on a pour tout $n \geq 0$, $a_n \leq u_{\phi(n)} \leq b_n$.

Or les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et admettent la même limite : le théorème des gendarmes permet de conclure que $(u_{\phi(n)})$ converge.

(e) Les seules hypothèses portant sur la suite (u_n) étaient que celle-ci était bornée. On vient donc de montrer que, de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

(f) On a utilisé un algorithme de dichotomie.

3. Il suffit de trouver une fonction discontinue en la limite de la suite (u_n)... et de vérifier quand même que ça marche !

Prenons par exemple la suite $(u_n)_{n\geq 1} = (1/n)_{n\geq 1}$ et considérons la fonction $f : x \mapsto \mathbf{1}_{x>0}$. La suite (u_n) tend vers 0, et pour tout n on a $f(u_n) = 1$ donc la suite $(f(u_n))$ tend vers 1, qui est différent de $f(0)$.

4. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et (u_n) une suite convergente de réels de cet intervalle. Notons ℓ la limite de la suite (u_n).

Montrons que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, $|f(u_n) - f(\ell)| \leq \epsilon$.

Soit $\epsilon > 0$ un réel fixé.

On sait que f est continue en ℓ : il existe donc un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b] \cap [\ell - \delta, \ell + \delta]$, on a $|f(x) - f(\ell)| \leq \epsilon$.

Or la suite (u_n) tend vers ℓ : puisque $\delta > 0$, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \delta$. On sait par hypothèse que, pour tout n, $u_n \in [a, b]$. On aura donc, pour tout $n \geq N$, $|f(u_n) - f(\ell)| \leq \epsilon$.

5. **Théorème des bornes**. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, a et b étant deux réels fixés. On note $M = \sup_{[a,b]} f$.

On ne demandait pas ici de justifier que M est fini... mais ça ne change finalement pas grand chose dans la preuve (à part pour la question a).

(a) Par définition de la borne sup M de l'ensemble $f([a, b])$: pour tout $\epsilon > 0$, il existe un point de l'ensemble $f([a, b])$ dans l'intervalle $[M - \epsilon, M]$. Commençons par noter $x_0 = a$.

Soit $n \geq 1$ un entier. Appliquons la propriété de la borne sup en remplaçant ϵ par $1/n$: il existe un point $y_n \in f([a, b])$ tel que $y_n \in [M - \frac{1}{n}, M]$. Donc il existe $x_n \in [a, b]$ (un antécédent de y_n) tel que $f(x_n) \in [M - \frac{1}{n}, M]$.

Par construction, la suite $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge vers M et, pour tout n, $x_n \in [a,b]$.

NB : si M était égal à $+\infty$, on pourrait par des arguments similaires montrer l'existence d'une suite (x_n) telle que $(f(x_n))$ tend vers $+\infty$.

(b) La suite (x_n) est bornée par $\max(|a|,|b|)$ donc, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergente : on note α la limite de cette sous-suite.

Comme f est continue en α, la suite $(f(x_{\phi(n)}))_n$ converge vers $f(\alpha)$. Par ailleurs, la suite $(f(x_{\phi(n)}))_n$ est une sous-suite de la suite (y_n) qui converge vers M : par unicité de la limite, on obtient que $M = f(\alpha)$.

NB : Si on avait $M = +\infty$, on obtiendrait que $(f(\phi(x_n)))$ tend vers $+\infty$... et vers $f(\alpha)$ ce qui contredit la continuité de f en α.

(c) On a donc prouvé que $M = \sup_{[a,b]} f$ admet un antécédent par f : f atteint sa borne supérieure (qui est donc un maximum). Le résultat sur la borne inférieure est similaire (remplacer f par $-f$).

La version « courte » de l'énoncé est : une fonction continue sur un intervalle borné est bornée et atteint ses bornes.

6. **Théorème des valeurs intermédiaires**. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

(a) On suppose pour cette question que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On procède par dichotomie : on note $a_0 = a$ et $b_0 = b$, puis, pour tout $n \geq 0$:

— Si $f((a_n + b_n)/2) > 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = ((a_n + b_n)/2$.

— Sinon, on pose $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$.

On peut remarquer que, à chaque itération, on a $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$.

Par une méthode similaire à celle utilisée dans la preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass (la même inégalités sont vérifiées), on peut démontrer que la suite (a_n) est croissante et majorée par b_0, donc convergente. Et la suite (b_n) est décroissante et minorée par a_0, donc convergente. La suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $1/2$, donc elle tend vers 0 : les deux suites (a_n) et (b_n) admettent donc la même limite, que l'on note c_0.

Puisque f est continue, on a $f(c_0) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$. Or, pour tout n, on a $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$. En passant à la limite dans cette inégalité, on conclut que $f(c_0) \leq 0 \leq f(c_0)$, c'est-à-dire que $f(c_0) = 0$.

Notons qu'on a simplement utilisé le fait que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires : le même résultat est encore vrai si $f(b) < 0 < f(a)$. Par ailleurs, si $f(a)$ ou $f(b)$ est nul, $c_0 = a$ ou b convient. Un résultat un peu plus complet est donc « Si f est continue et si 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un réel c_0 de $[a,b]$ tel que $f(c_0) = 0$ ».

(b) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Notons g_λ la fonction définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - \lambda$. La fonction g_λ est continue sur $[a,b]$ et, puisque λ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, 0 est compris entre $g_\lambda(a)$ et $g_\lambda(b)$.

On en déduit qu'il existe un réel $c_\lambda \in [a,b]$ tel que $g(c_\lambda) = 0$, ie tel que $f(c_\lambda) = \lambda$.

(c) Soient $a \leq b$ deux réels et soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$.

Pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Une autre façon de l'exprimer : si f est une fonction continue sur $[a,b]$, l'intervalle $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$) est inclus dans l'ensemble image $f([a,b])$.

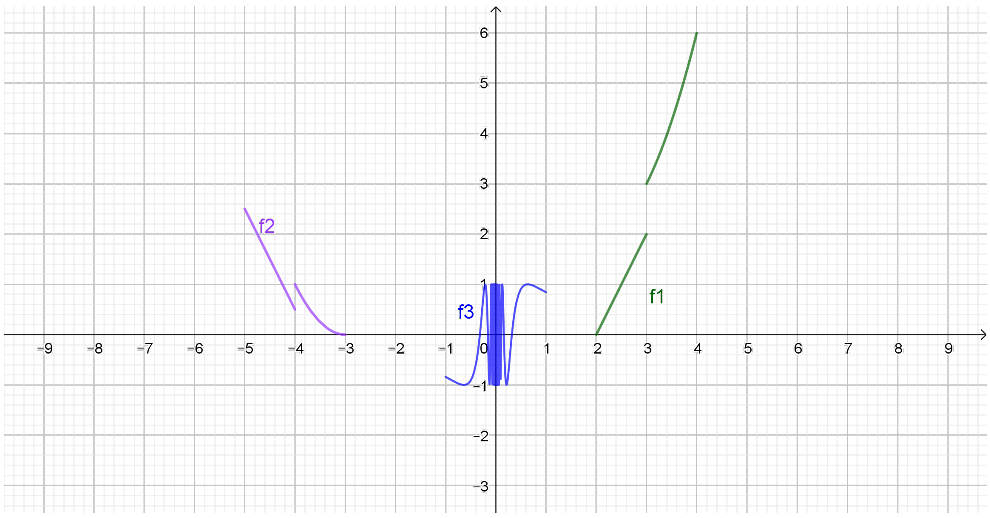
(d) Soit m et M les bornes inférieures et supérieurs de f sur $[a, b]$. D'après le théorème des bornes, il existe α et β dans $[a, b]$ tel que $f(\alpha) = m$ et $f(\beta) = M$.

Par définition de m et M, $f([a, b])$ est inclus dans $[m, M]$. Montrons que l'inclusion réciproque est vraie, c'est-à-dire que tout réel de l'intervalle $[m, M]$ admet un antécédent par f.

On applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ (ou à l'intervalle $[\beta, \alpha]$ si $\beta \leq \alpha$) : pour tout $\lambda \in [f(\alpha), f(\beta)]$, il existe un réel c_λ entre α et β tel que $f(c_\lambda) = \lambda$: on a ainsi exhibé un antécédent de λ par f. Cet antécédent est compris entre α et β, donc c'est un point de l'intervalle $[a, b]$.

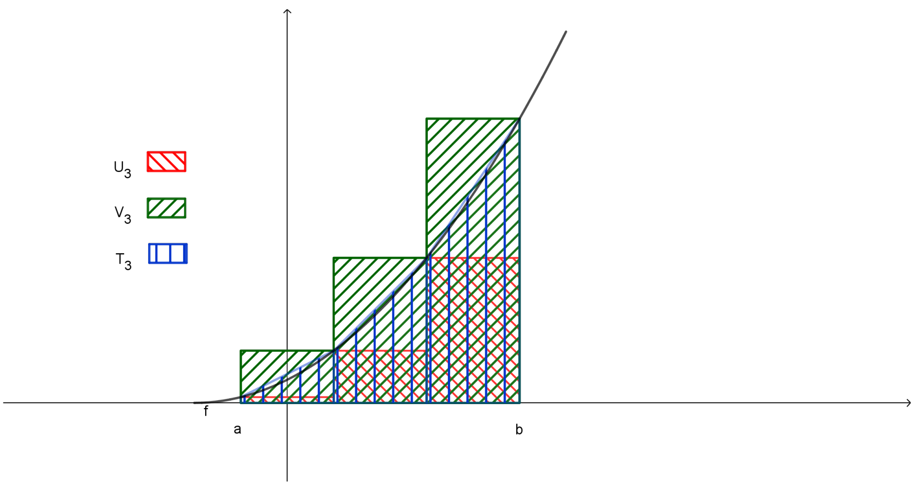
L'ensemble $f([a, b])$ coïncide donc avec l'intervalle $[m, M]$.

(e) Le plus simple est de prendre des fonctions raisonnables qui ont un point de discontinuité sur leur ensemble de définition : f_1 est définie sur $[2, 4]$ et $f_1([2, 4])$ n'est pas un intervalle ; f_2 n'est pas continue sur $[-5, -3]$ mais $\tilde{f}_2([-5, -3])$ est un intervalle...
On peut aussi choisir par exemple la fonction $f_3 : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$: cette fonction n'est pas continue en 0, mais l'image de tout intervalle par $\tilde{f}_2$ est un intervalle.



7. Attention, il y a une faute de frappe dans l'énoncé sur les indices de T_n : k doit aller de 0 à $n - 1$ et non de 1 à n !

(a) On trace la courbe représentative d'une fonction f positive et continue. L'aire du domaine « sous la courbe » (ou plus précisément, celle du domaine délimité par la courbe représentative de f et l'axe des abscisses d'une part, et d'autre part par les droites $y = a$ et $y = b$) est égale à A. Des domaines du plan d'aire respectivement U_3, V_3 et T_3 sont ici hachurés en rouge, vert et bleu.



(b) Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. La fonction f étant croissante sur $[t_k, t_{k+1}]$, on a bien, pour tout $t \in [t_k, t_{k+1}]$,

$$f(t_k) \le f(t) \le f(t_{k+1})$$

En intégrant sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$, il vient :

$$\frac{b-a}{n} f(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k)\ dt \le \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\ dt \le \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_{k+1})\ dt = \frac{b-a}{n} f(t_{k+1})$$

(c) Il reste à sommer les inégalités précédentes pour k allant de 0 à $n-1$:

$$U_n \le A \le \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_{k+1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{l=1}^{n} f(t_l) = V_n$$

Par ailleurs, on remarque que $V_n - U_n = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$.

(d) Notons $c_f = (b-a)(f(b) - f(a))$. On a alors :

$$U_n \le A \le U_n + \frac{c_f}{n}$$

donc

$$A - \frac{c_f}{n} \le U_n \le A.$$

De même,

$$V_n - \frac{c_f}{n} \le A \le V_n$$

donc

$$A \le V_n \le A + \frac{c_f}{n}$$

(e) On applique le théorème des gendarmes à partir des inégalités ci-dessus : on en déduit que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et de limite A (ou on écrit les inégalités de façon à mettre en évidence une majoration de $(U_n - A)$ et de $(V_n - A)$).
De plus, on a pour tout $n \ge 1$, $T_n = (U_n + V_n)/2$, donc (T_n) converge également vers A.

(f) Considérons la fonction $f : x \mapsto e^x$ sur $[a, b] = [2, 1]$. On a bien entendu

$$A = \int_1^2 f(t)\ dt = e^2 - e$$

Soit n un entier non nul. Explicitons les suites (U_n) et (V_n).
On a, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $t_k = 1 + k/n$, d'où

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{1+\frac{k}{n}} = \frac{e}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{1/n}\right)^k = \frac{e}{n} \frac{e^{n/n} - 1}{e^{1/n} - 1} = \frac{e^2 - e}{n(e^{1/n} - 1)}$$

On a également

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} e^{1+\frac{l+1}{n}} = e^{1/n} U_n = (e^2 - e) \frac{e^{1/n}}{n(e^{1/n} - 1)}$$

On utilise un développement limité à l'ordre 2 de la fonction exponentielle en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + o(x)$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $1/n$ tend vers 0, donc

$$e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puis

$$n(e^{1/n} - 1) = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On utilise également un développement limité de la fonction $u \mapsto 1/(1+u)$ à l'ordre 1 en 0 : $1/(1+u) = 1 - u + o(u)$.
D'où

$$U_n = (e^2 - e)\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (e^2 - e) - \frac{e^2 - e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Puis

$$\begin{aligned} V_n = e^{1/n}U_n &= \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left((e^2 - e) - \frac{e^2 - e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= (e^2 - e) + \frac{e^2 - e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

8. Soit $[\alpha, \beta]$ un sous-intervalle de $[a, b]$. On remarque que :
   - $\phi(\alpha) = \phi(\beta) = 0$
   - $h(\alpha) = f(\alpha)$ et $h(\beta) = f(\beta)$

   (a) On procède à une première intégration par partie (en dérivant ϕ et en intégrant $(f'' - h'')$:

   $$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \phi(x)(f''(x) - h''(x))\,dx &= \Big[\phi(x)(f'(x) - h'(x))\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \phi'(x)(f'(x) - h'(x))\,dx \\ &= 0 - \int_\alpha^\beta \phi'(x)(f'(x) - h'(x))\,dx \end{aligned}$$

   Puis on recommence (en dérivant ϕ' et en intégrant $f' - h'$) :

   $$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \phi(x)(f''(x) - h''(x))\,dx &= -\Big[\phi'(x)(f(x) - h(x))\Big]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \phi''(x)(f(x) - h(x))\,dx \\ &= 0 + \int_\alpha^\beta \phi''(x)(f(x) - h(x))\,dx \end{aligned}$$

   (b) ϕ'' est constante, égale à 1 et h'' est constamment nulle d'où

   $$\int_\alpha^\beta (f(x) - h(x))\,dx = \int_\alpha^\beta \phi(x)f''(x)\,dx$$

   donc

   $$\left|\int_\alpha^\beta (f(x) - h(x))\,dx\right| \leq M_2 \int_\alpha^\beta |\phi(x)|\,dx$$

   Il reste à calculer les intégrales de h et de ϕ sur $[\alpha, \beta]$: h est une fonction affine coïncidant avec f en α et en β. L'intégrale de h sur $[\alpha, \beta]$ est donc égale à l'aire du trapèze passant par les points $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$, $(\beta, f(\beta))$ et $(\alpha, f(\alpha))$. On a donc

   $$\int_\alpha^\beta h(x)\,dx = (\beta - \alpha)\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$$

ϕ est négative sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ d'où

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} |\phi(x)| \, dx &= -\int_{\alpha}^{\beta} \phi(x) \, dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta) \, dx \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{\alpha+\beta}{2} x^2 + \alpha\beta x \right]_{\alpha}^{\beta} \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} - \frac{\alpha+\beta}{2} (\beta^2 - \alpha^2) + \alpha\beta(\beta - \alpha) \right) \\
&= -\frac{1}{12} (\beta - \alpha) \left(2 \left(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2 \right) - 3 \left(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \right) + 6\alpha\beta \right) \\
&= \frac{1}{12} (\beta - \alpha) \left(\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta \right) = \frac{1}{12} (\beta - \alpha)^3
\end{aligned}$$

On a donc

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx - \frac{(\beta - \alpha)(f(\alpha) + f(\beta))}{2} \right| \leq M_2 \frac{(\beta - \alpha)^3}{12}$$

(c) On écrit les inégalités ci-dessus avec $(\alpha, \beta) = (t_k, t_{k+1})$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ puis on les somme :

$$\left| \int_{a}^{b} f(x) \, dx - T_n \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x) \, dx - \frac{b-a}{2n} \left(f(t_{k+1}) + f(t_k) \right) \right| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12 n^2}$$