M1 MEEF 2nd degré, CAPES de Mathématiques
Préparation à l'écrit S1 (UE MAT1261M)
Écrit blanc du 26 octobre 2017

Merci de rédiger sur deux copies différentes les parties Algèbre et Analyse !

Analyse

Exercice 1. Lorsqu'il passe ses vacances à la campagne, Jojo aime beaucoup jouer avec les bottes de foin. C'est bien connu, toutes les bottes de foin contiennent une aiguille. La probabilité que Jojo la trouve est égale à $p \in]0,1[$, et ne dépend en rien des aiguilles qu'il a trouvées ou pas dans les bottes précédentes.

1. Si Jojo fouille dans $n \geq 1$ bottes, quelle est la loi du nombre X_n d'aiguilles qu'il a trouvées ? Justifier votre réponse comme vous le feriez devant une classe de 1ère S.
2. Quelle est l'espérance de X_n ? Sa variance ? *On ne demande pas le détail des calculs !*
3. Si Jojo n'a fouillé dans aucune botte, que peut-on dire du nombre X_0 d'aiguilles trouvées ?
4. Aujourd'hui, Jojo va fouiller dans un nombre N aléatoire de bottes. On suppose que ce nombre N est indépendant du fait de trouver des aiguilles. On note Y le nombre d'aiguilles qu'il a trouvées parmi les N bottes. Pour tout entier $n \geq 0$, déterminer la loi de Y sachant $\{N = n\}$.
5. Pour tout entier $k \geq 0$, donner une expression de $\mathbf{P}(Y = k)$ faisant intervenir la loi de N.
6. Montrer que, si N est intégrable, alors Y est intégrable et on a $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(N)p$
7. Expliciter $\mathbf{P}(Y = N)$ à l'aide de la fonction génératrice de la loi de N.
8. On suppose dorénavant que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(N = n) = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$. Déterminer la loi de Y.
9. Montrer que Y et $N - Y$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 2. Séries de Taylor et développement en série entière

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

On rappelle le théorème suivant : Si une fonction f admet un développement en série entière sur l'intervalle $]-R,R[$, avec $R > 0$, alors :

— La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$,

— Son développement en série entière est unique et est donné par la série de Taylor de la fonction f à l'origine : pour tout réel $x \in]-R,R[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Partie I : Préliminaires

Dans cette partie, les questions sont indépendantes les unes des autres et leurs résultats peuvent être admis dans la suite du problème.

1. (a) Justifier, pour tout réel $x \in]-1,1[$, la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} x^n$ et donner sa valeur.

   (b) Pour tout $x \in]-1,1[$, en déduire la valeur des séries $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 0} nx^n$.

2. Démontrer que si f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, alors f est dérivable en 0. Donner un exemple de fonction admettant un développement limité à l'ordre 2 en 0 mais qui n'est pas deux fois dérivable en 0.
3. Démontrer par récurrence la formule de Taylor avec reste intégral : Si I est un intervalle contenant le réel a, si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, alors pour tout réel $x \in I$ et tout entier naturel n, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt.$$

4. Soit g une fonction positive et continue sur l'intervalle $[0,1]$. Le but de cette question est de démontrer que si la fonction g n'est pas identiquement nulle, alors son intégrale sur $[0,1]$ est strictement positive.
   On suppose donc qu'il existe un réel $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel $\gamma > 0$ et un intervalle $[\alpha, \beta]$, avec $\alpha \neq \beta$, inclus dans $[0,1]$ et contenant x_0 tels que, pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $g(x) \geq \gamma$.
   (b) En déduire que
   $$\int_\alpha^\beta g(t)\ dt > 0$$
   puis que
   $$\int_0^1 g(t)\ dt > 0.$$
   (c) Conclure et énoncer la contraposée de cette propriété.
   (d) La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?
   (e) Donner un exemple de fonction définie et positive sur $[0,1]$, non identiquement nulle et dont l'intégrale sur $[0,1]$ est nulle.

Partie II : Existence et utilisation de la décomposition en série entière

1. Montrer que si une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0, alors il existe un réel $r > 0$ tel que la suite $(r^n f^n(0)/n!)_n$ tende vers 0. Comparer un tel réel et le rayon de convergence de la série entière.
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-R, R[$, où R est un réel strictement positif. On suppose que f vérifie la condition $(*)$ suivante :

$$(*) \qquad \exists (M, a) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \forall x \in]-R, R[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M a^n$$

   (a) Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$ et pour tout entier $n \geq 0$, on a
   $$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt \right| \leq M \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$
   (b) Conclure que, pour tout $x \in]-R, R[$ fixé, la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\right)_n$ converge vers $f(x)$.
   (c) Que peut-on dire du rayon de convergence de la série
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\ ?$$

3. Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = 1/(1-x)$. Déterminer, pour tout entier naturel n, la dérivée n-ième de f en 0 et justifier qu'il n'existe pas de réels strictement positifs M et a tels que, pour tout entier $n \geq 0$, $|f^{(n)}(0)| \leq Ma^n$.
4. La condition $(*)$ est-elle nécessaire pour l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 ? Est-elle suffisante ?
5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et pour tout réel } x \neq 0,\ f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

   Démontrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 et en déduire qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donner, pour tout $n \geq 0$, la valeur de la dérivée n-ième de f en 0.
6. Théorème des moments pour les polynômes. Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ une fonction polynôme de degré au plus $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, on a $\int_0^1 x^j P(x)\, dx = 0$. En écrivant P^2 sous la forme

$$P^2(x) = \sum_{k=0}^n P(x) a_k x^k,$$

   montrer que

$$\int_0^1 P^2(x)\, dx = 0$$

   et en déduire que P est la fonction nulle.
7. Théorème des moments pour les fonctions développables en série entière.
   Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$ où R est un réel strictement supérieur à 1. On suppose, que pour tout entier naturel n,

$$\int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0.$$

   L'objectif de cette question est de montrer que f est identiquement nulle sur $]-R,R[$.
   (a) Soit $g : x \mapsto \sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence strictement supérieur à 1. Justifier que la suite $\left(\sum_{n \geq N} |a_n|\right)$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$ et en déduire que

$$\left(\int_0^1 \sum_{n \geq N} |a_n x^n f(x)|\, dx\right)_N \quad \text{tend vers 0 lorsque } N \text{ tend vers } +\infty$$

   (b) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_0^1 g(x) f(x)\, dx\right| \leq \left|\sum_{n=0}^N a_n \int_0^1 x^n f(x)\, dx\right| + \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n x^n f(x)|\, dx$$

   (c) En déduire que $\int_0^1 f(x) g(x)\, dx$ est nul.
   (d) Qu'obtient-on si l'on choisit pour tout $n \geq 0$, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$?
   (e) Conclure que f est identiquement nulle sur $[0,1]$, puis sur $]-R,R[$.