M1 MEEF 2nd degré, CAPES de Mathématiques
Préparation à l'écrit S1 (UE MAT1261M)
Corrigé de l'écrit d'analyse du 26 octobre 2017

Exercice 1. Lorsqu'il passe ses vacances à la campagne, Jojo aime beaucoup jouer avec les bottes de foin. C'est bien connu, toutes les bottes de foin contiennent une aiguille. La probabilité que Jojo la trouve est égale à $p \in]0,1[$, et ne dépend en rien des aiguilles qu'il a trouvées ou pas dans les bottes précédentes.

1. On est dans le cadre d'un schéma de Bernoulli : on répète n fois la même expérience (chercher une aiguille dans une botte de foin) qui a deux issues possibles (trouver l'aiguille=succès, ne pas la trouver=échec), et les expériences successives sont indépendantes et de même probabilité p de réussite. Le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre d'aiguilles trouvées par Jojo, suit donc une loi binomiale de paramètre (n,p) : pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, on a
$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2. L'espérance de X_n est égale à np : en comptant le nombre de succès, on somme n variables aléatoires de loi de Bernoulli $(Z_i)_{i \leq n}$, et chacune est d'espérance p. L'espérance de X_n est donc égale à la somme des espérances des $(Z_i)_{i \leq n}$. Or, pour tout i, $\mathbf{E}(Z_i) = p$ donc $\mathbf{E}(X_n) = np$.

   Les Y_i sont des variables aléatoires indépendantes donc la variance de X_n est égale à la somme des variances des $(Z_i)_{i \leq n}$. Or $\operatorname{var}(Z_i) = \mathbf{E}(Z_i^2) - (\mathbf{E}(Z_i))^2 = 1^2\mathbf{P}(Z_i = 1) - p^2 = p(1-p)$.

   On a donc $\operatorname{var}(X_n) = np(1-p)$.

3. Par définition, $X_0 = 0$.

4. La question n'a de sens que pour les entiers n tels que $\mathbf{P}(N = n) > 0$.

   Y est une variables aléatoire à valeurs entières (positives). La loi conditionnelle de Y sachant $\{N = n\}$ revient donc à calculer $\mathbf{P}_{N=n}(Y = k)$ pour tout entier naturel k.
$$\mathbf{P}_{\{N=n\}}(Y = k) = \frac{\mathbf{P}(Y = k, N = n}{\mathbf{P}(N = n)} = \frac{\mathbf{P}(X_n = k, N = n}{\mathbf{P}(N = n)} = \mathbf{P}(X_n = k)$$
   La dernière égalité vient du fait que X_n et N sont des variables aléatoires indépendantes.

5. On obtient la loi de Y en utilisant la formule des probabilités totales : les événements $(\{N = n\})_n$ forment un système complet d'événements. Soit k un entier naturel.
$$\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{N=n}(Y = k)\mathbf{P}(N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n = k)\mathbf{P}(N = n)$$
   On ne somme en théorie que sur les entiers n tels que $\mathbf{P}(N = n) > 0$, mais le terme de droite ne change pas si on inclut tous les entiers.

   Lorsque $n < k$, $\mathbf{P}(X_n = k) = 0$. Il vient donc :
$$\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathbf{P}(N = n)$$

6. Supposons que N est intégrable. Y est une variable aléatoire positive, donc les égalités suivantes ont un sens, que les séries convergent ou non.

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k\geq 0} k\mathbf{P}(Y=k) = \sum_{k\geq 0}\left[k\sum_{n\geq 0}\mathbf{P}(X_n=k)\mathbf{P}(N=n)\right] = \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 0} k\mathbf{P}(X_n=k)\mathbf{P}(N=n)$$

On intervertit l'ordre de sommation des deux séries :

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} k\mathbf{P}(X_n=k)\mathbf{P}(N=n) = \sum_{n\geq 0}\left[\mathbf{P}(N=n)\sum_{k\geq 0} k\mathbf{P}(X_n=k)\right]$$

Or, pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k\geq 0} k\mathbf{P}(X_n=k)$ est égal à $\mathbf{E}(X_n) = np$ On a donc

$$\mathbf{E}(Y) = p\sum_{n\geq 0} n\mathbf{P}(N=n) = p\mathbf{E}(N)$$

7.
$$\mathbf{P}(Y=N) = \sum_{n\geq 0}\mathbf{P}(X_n=n, N=n) = \sum_{n\geq 0}\mathbf{P}(X_n=n)\mathbf{P}(N=n)$$

Or $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, X_n suit une loi binomiale (n,p). On a donc :

$$\mathbf{P}(Y=N) = \mathbf{P}(N=0) + \sum_{n\geq 1} p^n\mathbf{P}(X=n) = \sum_{n\geq 0} p^n\mathbf{P}(N=n) = \mathbf{E}(p^N)$$

La probabilité $\mathbf{P}(Y=N)$ est donc égale à la valeur au point p de la fonction génératrice de N.

8. On a déjà vu que, pour tout $k \geq 0$,

$$\mathbf{P}(Y=k) = \sum_{n=k}^{+\infty}\mathbf{P}(X_n=k)\mathbf{P}(N=n)$$

On en déduit
$$\mathbf{P}(Y=k) = \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

On effectue un changement d'indice en posant $j = n-k$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y=k) &= e^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\sum_{j\geq 0}\frac{(1-p)^j\lambda^{j+k}}{j!}\\ &= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{j\geq 0}\frac{\lambda(1-p)^j\lambda}{j!}\\ &= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\end{aligned}$$

9. Nous allons commencer par déterminer la loi du couple $(Y, N-Y)$. Soient k et ℓ deux entier naturels.

$$\mathbf{P}(Y=k, N-Y=\ell) = \mathbf{P}(Y=k, N=k+\ell) = \mathbf{P}_{\{N=k+\ell\}}(Y=k)\mathbf{P}(N=k+\ell) = \binom{k+\ell}{k}p^k(1-p)^\ell e$$

On cherche à faire apparaître $\mathbf{P}(Y=k)$ dans le membre de droite :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y=k, N-Y=\ell) &= e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-p(1-\lambda)}\frac{(p(1-\lambda))^\ell}{\ell!}\\ &= \mathbf{P}(Y=k)e^{-p(1-\lambda)}\frac{(p(1-\lambda))^\ell}{\ell!}\end{aligned}$$

Sommer sur ℓ permet de trouver la loi de $N-Y$: pour tout entier naturel ℓ,

$$\mathbf{P}(N-Y=\ell) = \sum_{k\geq 0}\mathbf{P}(Y=k)e^{-p(1-\lambda)}\frac{(p(1-\lambda))^\ell}{\ell!} = e^{-p(1-\lambda)}\frac{(p(1-\lambda))^\ell}{\ell!}$$

car $\sum_{k\geq 0}\mathbf{P}(Y=k)=1$.
On constate donc que, pour tout couple $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$,

$$\mathbf{P}(Y=k, N-Y=\ell) = \mathbf{P}(Y=k)\mathbf{P}(N-Y=\ell)$$

donc les variables aléatoire Y et $N-Y$ sont indépendantes.

Exercice 2. Séries de Taylor et développement en série entière

Ce problème est très fortement inspiré par le sujet de l'épreuve Maths 1 du concours CCP 2013 (MP)

Partie I : Préliminaires

1. (a) On sait que, pour tout entier naturel k et tout réel $x\neq 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$$

Soit $x\in]-1,1[$. On a $\lim_k x^k = 0$ d'où

$$\lim_k \frac{1-x^{k+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

On en déduit que la série de terme général (x^n) est convergente et que la somme de cette série est égale à $1/(1-x)$.

(b) La question précédente permet d'affirmer que la fonction $x\mapsto\sum_{n\geq 0}x^n$ est une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 (ce rayon vaut bien entendu 1, mais la question n'est pas posée !). Or on peut dériver terme à terme une série entière à l'intérieur de son disque de convergence. On obtient alors :

$$\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \left(\sum_{n\geq 1}x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2. Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre 1 en 0 : on a pour tout $x\in I$, $f(x) = a_0 + a_1 x + x\epsilon(x)$, où ϵ est une fonction qui tend vers 0 en 0.
On a $f(0) = a_0 + a_1\times 0 + \lim_0 x\epsilon(x) = a_0$.
Soit h un réel tel que $h\in I$ et calculons le taux d'accroissement de f entre 0 et h :

$$\frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \frac{a_0+a_1h+h\epsilon(h)-a_0}{h} = \frac{a_1h+h\epsilon(h)}{h} = a_1+\epsilon(h)$$

Or, lorsque $h \to 0$, $\epsilon(h) \to 0$, donc le taux d'accroissement $\frac{f(h)-f(0)}{h-0}$ tend vers a_1 lorsque h tend vers 0 : f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.
Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ On a

$$f(x) = 0 + 0 \times x + x^2 \times \left(x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

La fonction $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 donc f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 (avec comme coefficients $a_0 = a_1 = 0$).
Étudions la dérivée de f : pour tout x non nul,

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^3\left(-\frac{2}{x^3}\right)\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

En 0, d'après la première partie de la question, on a $f'(0) = 0$.
Calculons le taux d'accroissement de f' entre 0 et un réel $x \neq 0$:

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

La limite de ce taux d'accroissement n'existe pas lorsque $x \mapsto 0$, donc f' n'est pas dérivable en 0 : la dérivée seconde de f en 0 n'existe pas.

3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On note, pour tout $n \geq 0$, P_n la propriété

$$P_n : \text{ Pour tout } a \in I \text{ et pour tout } x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Vérifions que cette propriété est vraie pour $n = 0$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc elle est dérivable et sa dérivée est continue. On a donc : pour tout $(a, x) \in I^2$,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f(t)\, dt$$

ie :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f(t)\, dt$$

Soit maintenant n un entier tel que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie. On a donc, pour tout $(a, x) \in I^2$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

La fonction $f^{(n+1)}$ est dérivable entre a et x : on peut donc intégrer par parties l'intégrale, en intégrant la partie polynomiale et en dérivant $f^{(n+1)}$: *Attention aux signes !*

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt &= \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt \\
&= 0 + \frac{-(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt
\end{aligned}$$

d'où :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt.$$

On conclut que, si n est un entier tel que P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie : puisque P_0 est vraie, le principe de récurrence implique que P_n est vraie pour tout n.

4. Soit g une fonction positive et continue sur l'intervalle $[0,1]$.
   On suppose qu'il existe un réel $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) > 0$.
   (a) Soit $\gamma = g(x_0)/2 > 0$. Par continuité de g en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$ vérifiant $|x - x_0| \leq \delta$, on a $|g(x) - g(x_0)| \leq \frac{g(x_0)}{2}$. Ceci implique que, pour tout $x \in [0,1]$ vérifiant $|x - x_0| \leq \delta$, on a $g(x) \geq g(x_0)/2$.
   En notant α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$, $(\alpha, \beta) \in ([0,1] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta])^2$ et $\varepsilon = g(x_0)/2 > 0$, on a : pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $g(x) > \varepsilon$
   (b) Par croissance de l'intégrale, on a
   $$\int_\alpha^\beta g(t)\ dt \geq \int_\alpha^\beta \varepsilon\ dt = \varepsilon(\beta - \alpha) > 0$$
   La fonction g est positive donc
   $$\int_0^1 g \geq \int_\alpha^\beta g > 0$$
   (c) On a donc démontré le résultat suivant : Soit g est une fonction positive et continue sur $[0,1]$. S'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) > 0$ alors l'intégrale de g sur $[0,1]$ est strictement positive.
   La contraposée de ce résultat est la suivante : Soit g une fonction continue et positive sur $[0,1]$. Si $\int_0^1 g = 0$, alors g est identiquement nulle sur $[0,1]$.
   (d) La réicproque de cette propriété stipule que si g est identiquement nulle sur $[0,1]$, alors son intégrale sur $[0,1]$ est nulle, est bien entendu vraie !
   (e) Par exemple la fonction $x \mapsto \mathbf{1}_{\{0.1\}}(x)$: cette fonction vaut 1 en 0.1 donc elle n'est pas identiquement nulle. Elle est positive, et son intégrale sur $[0,1]$ est égale à 1.

Partie II : Existence et utilisation de la décomposition en série entière

1. Soit f une fonction développable en série entière en 0. Notons R sont rayon de convergence, $R > 0$, puis $r = R/2$.
   La série de terme général $(r^n f^{(n)}(0)/n!)$ est convergente, donc son terme général tend vers 0 : $\lim_n r^n f^{(n)}(0)/n! = 0$.
   Si $r > 0$ est tel que $(r^n f^{(n)}(0)/n!)$ tend vers 0, alors $R > r$ (par exemple par le lemme d'Abel).
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-R, R[$, où R est un réel strictement positif. On suppose que f vérifie la condition $(*)$ suivante :
   $$(*) \qquad \exists (M, a) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \forall x \in]-R, R[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M a^n$$
   (a) Soit $x \in [0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt\right| \leq \int_0^x \left|\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\right|\ dt \leq \int_0^x \left|\frac{(x-t)^n}{n!} M a^{n+1}\right|\ dt$$
   Or pour tout $t \in [0, x]$, $(x - t) \geq 0$ donc
   $$\int_0^x \left|\frac{(x-t)^n}{n!}\right|\ dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$
   ce qui permet de conclure.
   Le cas $x \in]-R, 0]$ est similaire.

(b) Soit $x \in]-R, R[$. On utilise la formule de Taylor avec reste intégral : pour tout entier n :
$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt$$
donc, si $x \in [0, R[$,
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leq M \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
On peut donc conclure que, pour tout $x \in]-R, R[$, $(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0))$ converge vers $f(x)$.

3. Soit f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = 1/(1-x)$. On a vu dans la partie « Préliminaires » que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$$
En utilisant la formule de Taylor et l'unicité de la décomposition en série entière, on obtient : pour tout $n \geq 0$,
$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1$$
On a donc, pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(0) = n!$.
On sait que pour tout $a > 0$, la suite $(a^n/n!)_n$ tend vers 0, donc il n'existe pas de réels a et M tels que, pour tout $n \geq 0$, $|f^{(n)}(0)| \leq M a^n$.

4. La condition $(*)$ n'est pas une condition nécessaire pour l'existence d'un développement en série entière de rayon de convergence strictement positif : la question précédente fournit en effet un exemple de fonction développable en série entière ne vérifiant pas $(*)$.
Cette condition $(*)$ est suffisante pour assurer l'existence du développement en série entière puisque toute fonction vérifiant cette condition admet un développement en série entière.

5. Soit f la fonction définie par $f(0) = 1$ et si $x \neq 0$, $f(x) = \sin x / x$. La fonction sin est développable en série entière car, pour tout n, $\sin^{(n)} x \in [-1, 1]$, donc $(*)$ est vérifiée avec $R = +\infty$, $a = 1$ et $M = 1$. On calcule aisément les dérivées successives de sin en 0, ce qui permet d'écrire : pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sin x = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
On en déduit que, pour tout $x \neq 0$,
$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$
Cette égalité est également vraie pour $x = 0$. On en déduit donc que f est développable en série entière, avec un rayon de convergence infini.
On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout $n \geq 0$,
$$f^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{n!}{(2n+1)!}$$

6. Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynôme de degré au plus $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, on a $\int_0^1 x^j P(x)\ dx = 0$. On a, pour tout x

$$P^2(x) = \sum_{k=0}^{n} P(x) a_k x^k$$

donc

$$\int_0^1 P^2(x)\ dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} P(x) a_k x^k\ dx = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 P(x) a_k x^k\ dx$$

Or, par hypothèse, pour tout k, on a $\int_0^1 P(x) a_k x^k\ dx = 0$ d'où $\int_0^1 P^2(x)\ dx = 0$.
P^2 est alors une fonction continue et positive dont l'intégrale sur $[0, 1]$ est égale à 1 : d'après la question 4) des Préliminaires, P^2 est nulle, donc P est la fonction nulle.

7. Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ où R est un réel strictement supérieur à 1. On suppose, que pour tout entier naturel n,

$$\int_0^1 x^n f(x)\ dx = 0.$$

(a) Soit $g : x \mapsto \sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence strictement supérieur à 1. Comme le rayon de convergence de la série est strictement supérieur à 1, la série est absolument convergente en $x = 1$, donc son reste tend vers 0 :

$$\lim_N \sum_{n \geq N} |a_n| = 0$$

Notons $M = \sup_[0, 1]|f|$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier K tel que, pour tout $N \geq K$, on a

$$\sum_{n \geq N} |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

On a alors, pour tout $N \geq K$

$$\int_0^1 \sum_{n \geq N} |a_n x^n f(x)|\ dx \leq \int_0^1 \sum_{n \geq N} |a_n| M\ dt \leq \varepsilon$$

On peut alors conclure que la suite $(\int_0^1 \sum_{n \geq N} |a_n x^n f(x)|\ dx)_N$ tend vers 0.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) g(x)\ dx \right| &\leq \left| \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (f(x) a_n x^n)\ dx \right| + \left| \int_0^1 f(x) \sum_{n \geq N+1} a_n x^n\ dx \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 f(x) a_n x^n\ dx \right| + \int_0^1 \left| \sum_{n \geq N+1} f(x) a_n x^n \right|\ dx \end{aligned}$$

(c) Le premier terme du membre de droite de l'inégalité ci-dessus est nul par hypothèse sur n. Intéressons-nous au 2ème terme :

$$\int_0^1 \left| \sum_{n \geq N+1} f(x) a_n x^n \right| \, dx \leq \int_0^1 \left| \sum_{n \geq N+1} a_n \right| \, |f(x)| \, dx = \left| \sum_{n \geq N+1} a_n \right| \int_0^1 |f(x)| \, dx$$

Ce terme tend donc vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$: on peut donc conclure que, pour toute fonction g développable en série entière en 0 et de rayon de convergence strictement supérieur à 1, $| \int_0^1 f(x)g(x) \, dx = 0$

(d) Notons pour tout $n \geq 0$, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. On a alors $g \equiv f$. On obtient donc $\int_0^1 f^2 = 0$

(e) La fonction f^2 est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$. D'après la question 4) des préliminaires, on peut conclure que f^2 est nulle sur $[0, 1]$, donc f est nulle sur $[0, 1]$.

On en déduit que toutes les dérivées successives de f en 0^+ sont nulles. Donc on a, pour tout n, $f^{(n)}(0) = 0$. Or pour tout $x \in]-R, R[$,

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

f est donc la fonction identiquement nulle sur $]-R, R[$.