Université Claude Bernard–Lyon I
CAPES de Mathématiques : Oral
Année 2006–2007

Méthode d'Euler pour les équations différentielles

A ne pas rater

- *L'exemple canonique :* $y' = ay$;
- la justification de la convergence de la méthode pour au moins un type d'équations ;
- un vrai exemple numérique implémenté en machine (pas fait ici).

Pour enrichir

- Sur l'exemple canonique $y' = ay$, un schéma implicite ;
- la justification de la convergence de la méthode pour toutes les équations $y' = f(t, y)$;
- la stabilité de la méthode.

1° Problème et méthode

On cherche à calculer une approximation de la solution du problème de Cauchy suivant

$$\forall t \in [0, T],\ y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = u_0,$$

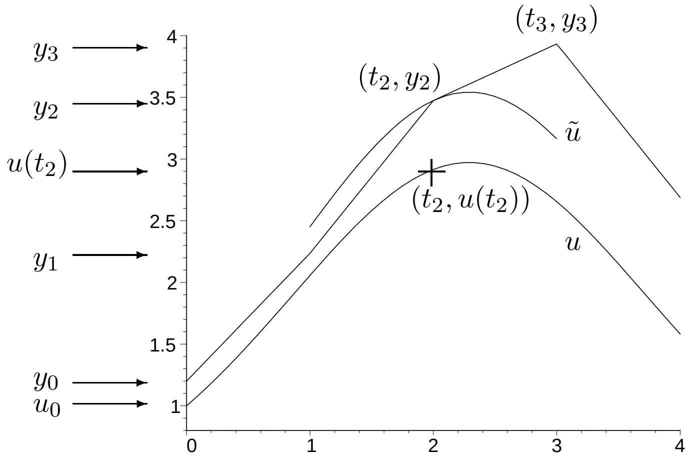
où f est une fonction "assez régulière", définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$, $u_0 \in \mathbb{R}$.
On fixe $h > 0$ et on approxime la solution u du problème de Cauchy par une fonction affine sur chacun des intervalles $[t_n, t_{n+1}] = [nh, (n+1)h]$. Il suffit donc de définir la valeur y_n de cette fonction en t_n, pour $0 \le n \le T/h$.
On part d'une approximation y_0 de u_0 (après tout, on n'a pas de raison de penser qu'on connait ou qu'on sait calculer u_0 exactement). Supposons connaître $y_0, \ldots, y_n$, on pose :

$$(*) \qquad y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n).$$

Justification géométrique : Le point (t_{n+1}, y_{n+1}) est sur la droite contenant (t_n, y_n) et de pente $f(t_n, y_n)$. Or, $f(t_n, y_n)$ est la pente de la tangente à la courbe de $\tilde{u}$, solution du problème de Cauchy suivant :

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_n) = y_n.$$

Le sens géométrique de la relation $(*)$, c'est donc d'approximer la courbe de u, par celle de $\tilde{u}$, puis d'approximer cette dernière par sa tangente en (t_n, y_n).



$$y' = \sin\left(\frac{10t}{22} + 1\right) y$$

$$f(t, r) = \sin\left(\frac{10t}{22} + 1\right) r$$

$$h = 1,\ T = 4,\ t_n = n$$

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + h\, f(t_2, y_2) \\ &= y_2 + h\tilde{u}'(t_2) \end{aligned}$$

Construction de y_3

Problème *Considérons un problème de Cauchy*

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = u_0,$$

soit u la solution de ce problème sur un intervalle $[0, T]$*, soit* $h > 0$ *et* $y_0 \in \mathbb{R}$*, on définit une suite* $(y_n)_{0 \leq n \leq T/h}$ *par*

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n).$$

On appelle $\hat{u}$ *"la" fonction affine par morceaux qui, pour tout* $0 \leq n \leq T/h$*, prend la valeur* y_n *en* t_n*.*
Peut-on, sous des hypothèses raisonnables sur f*, montrer que* $\hat{u}$ *est une bonne approximation de* u *?*

Ce que l'on veut dire par "bonne approximation", c'est que si y_0 est proche de u_0 et si h est assez petit, on peut rendre petit l'écart

$$\max_{0 \leq n \leq T/h} |u(t_n) - y_n|$$

Dans la suite, on posera

$$u_n = u(t_n).$$

2° Exemples élémentaires

(a) Exemple "trivial" : $y' = f(t)$

Supposons que $f : [O, T] \to \mathbb{R}$ soit une fonction continue. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\forall t \in [0, T],\ y'(t) = f(t), \quad y(0) = 0.$$

Sa solution est évidemment $t \mapsto \int_0^t f$... La méthode d'Euler avec $y_0 = 0$ donne :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n),$$

si bien que

$$y_n = h \sum_{k=0}^{n} f(kh).$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = T/N$, on voit que

$$y_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right), \text{ vu comme approximation de } \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, dans ce cas, la méthode d'Euler n'est autre que la méthode des rectangles : on sait qu'elle converge toujours, et la convergence est en $1/n$ si f est $\mathcal{C}^1$.
Noter que la convergence est assez lente : les méthodes des trapèzes et du point médian donne beaucoup mieux sans plus de calcul, et la preuve de la convergence est plutôt plus simple...

(b) L'exemple canonique : le cas linéaire $y' = ay$

Attention ! *Il est indispensable de citer cet exemple.*

Soit $a \in \mathbb{R}$, on s'intéresse au problème de Cauchy :

$$y' = ay, \quad y(0) = 1.$$

Dans les notations précédentes, on prend $f(t, y) = ay$. On obtient dans ce cas

$$y_{n+1} = y_n + h\, ay_n = (1 + ah)y_n,$$

d'où :

$$y_n = (1 + ah)^n.$$

Si on fixe $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = T/N$, on obtient pour approximation de $u(t_N) = \exp(aT)$ la valeur :

$$y_N = \left(1 + \frac{aT}{N}\right)^N.$$

On reconnaît une suite qui tend fort classiquement vers $\exp(aT)$. Mais, dans l'esprit du programme de terminale S, et à titre d'exemple pour le cas général, on veut montrer *a priori* que la méthode d'Euler converge bien : c'est ce que fait le théorème du paragraphe suivant.

(c) Plus original : schéma d'Euler implicite pour $y' = ay$

Idée : Au lieu du développement de Taylor $u(t + h) = u(t) + hu'(t) + o(h)$ qui fondait la méthode précédente, on peut aussi bien partir de $u(t+h) = u(t)+hu'(t+h)+o(h)$. En d'autres termes, on veut poser :

$$y_{n+1} = y_n + h\,f(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

Ceci est une équation en y_{n+1}, d'où le nom de "schéma implicite". On peut montrer qu'elle a une unique solution si f est "assez régulière" et h assez petit. On va ici se contenter d'un exemple.

Exemple : Reprenons, pour $a \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy linéaire

$$y' = ay, \quad y(0) = 1.$$

On obtient dans ce cas

$$y_{n+1} = y_n + h\,ay_{n+1}, \quad \text{ou encore } (1 - ah)y_{n+1} = y_n,$$

d'où :

$$y_{n+1} = (1 - ah)^{-n}.$$

Si on fixe $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = T/N$, on obtient pour approximation de $u(t_N) = \exp(aT)$ la valeur :

$$y_N = \left(1 - \frac{aT}{N}\right)^{-N}.$$

Intérêt de la manipulation ? Il arrive que le schéma implicite soit plus stable que le schéma explicite, i.e. que les erreurs de calculs se propagent moins vite. Pour de vraies explication, voir par exemple le cours de Michelle Schatzman, *Analyse numérique*, Dunod.

3° Convergence de la méthode d'Euler

Théorème *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $(0, u_0) \in \Omega$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, i.e. qu'il existe $L > 0$ tel que*

$$\forall (t, r), (t, r') \in \Omega, \quad |f(t, r) - f(t, r')| \leq |r - r'|.$$

On suppose enfin que le problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = u_0$$

a une solution u (nécessairement unique) sur un intervalle $[0, T]$, où $T > 0$.
On fixe $h > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ de sorte que $(0, y_0) \in \Omega$, et on pose :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \qquad \text{où } t_n = nh.$$

Alors :
(i) *si $|y_0 - u_0|$ et h sont assez petits, les y_n sont bien définis tant que $0 \leq n \leq T/h$;*
(ii) *il existe $C, D > 0$ ne dépendant que de Ω, f et T tel que :*

$$\forall 0 \leq n \leq T/h, \quad |y_n - f(t_n)| \leq C|y_0 - u_0| + Dh.$$

(a) Première étape : majoration fondamentale.
Pour tout n, notons $u_n = u(t_n)$. On veut une relation liant $y_{n+1} - un + 1$ et $y_n - u_n$. On écrit donc :

$$y_{n+1} - u_{n+1} = y_n + hf(y_n) - u_{n+1}.$$

Idée *Utiliser que y_n est proche de u_n, donc écrire $y_n - u_n$; on voit apparaître $u_{n+1} - u_n = u(t_n+h)-u(t_n)$, qui par un DL est proche de $hu'(t_n) = hf(t_n, u_n)$, qui est proche de $hf(t_n, y_n)$.*

Conformément à cette idée, on complique l'écriture :

$$\begin{aligned} y_{n+1} - u(t_{n+1}) &= \underbrace{y_n - u_n} + \underbrace{u_n - u_{n+1}} + hf(t_n, y_n) \\ &= \underbrace{y_n - u_n} + \underbrace{u_n - u_{n+1} + hu'(t_n)} \underbrace{-hf(t_n, u_n) + hf(t_n, y_n)}. \end{aligned}$$

Comme f est $\mathcal{C}^1$, u est $\mathcal{C}^2$, u'' est bornée[1] sur $[0, T]$ par un réel $2M > 0$. On a donc, en vertu de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 :

$$|u_{n+1} - u_n - hu'(t_n)| = |u(t_{n+1}) - u(t_n) - hu'(t_n)| \leq Mh^2.$$

Par ailleurs, (y_n) est bornée et f est supposée L-lipschitzienne, donc on a :

$$|hf(t_n, y_n) - hf(t_n, u_n)| \leq Lh|y_n - u_n|.$$

Ainsi, on tire l'inégalité fondamentale :

$$|y_{n+1} - u_{n+1}| \leq (1 + Lh)|y_n - u_n| + Mh^2.$$

Ainsi, l'erreur commise $|y_n - u_n|$ satisfait une inégalité qui, si c'était une égalité, en ferait une suite arithmético-géométrique.
(b) Deuxième étape : suite "pseudo arithmético-géométrique".
Pour tout n, posons

$$\delta_n = (1 + Lh)^{-n}|y_n - u_n|,$$

on a montré que :

$$\delta_{n+1} \leq \delta_n + \frac{Mh^2}{(1 + Lh)^{n+1}}.$$

On en tire en sommant téléscopiquement $\delta_{n+1} - \delta_n$:

$$\delta_n \leq \delta_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Mh^2}{(1 + Lh)^{n+1}} = \delta_0 + \frac{Mh^2}{(1 + Lh)} \frac{1 - \frac{1}{(1+Lh)^n}}{1 - \frac{1}{1+Lh}} \leq \delta_0 + \frac{M}{L}h.$$

Prenons $N \geq 1$ et $h = T/N$, alors, pour $n \leq N$, on a :

$$|y_n - u_n| \leq (1 + Lh)^n \delta_n.$$

Avec $n \leq T/h$ et la concavité de $x \mapsto \ln(1 + x)$, il vient :

$$(1 + Lh)^n \leq (1 + Lh)^{T/h} = e^{\frac{T}{h}\ln(1+Lh)} \leq e^{\frac{T}{h}Lh} = e^{LT},$$

d'où, pour tout n tel que $0 \leq n \leq \frac{T}{h}$:

$$(\S) \quad |y_n - u_n| \leq e^{LT}|y_0 - u_0| + \frac{Me^{LT}}{L}h.$$

[1] **Aparté :** Valeur de M. En dérivant l'équation de u, on a, pour $t \in [0, T]$:

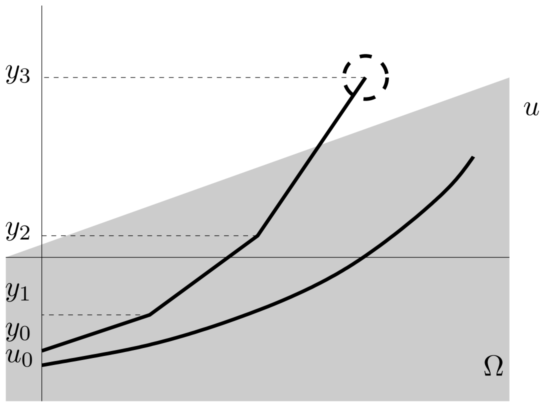
$$|u''(t)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, u(t)) + u'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(t, u(t))\right| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, u(t))\right| + \left|f(t, u(t))\frac{\partial f}{\partial y}(t, u(t))\right|,$$

quantité majorée par $2M = \max_{[0,T]} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \max_{[0,T]} |f| \ \max_{[0,T]} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$. A préciser dans le paragraphe 4°.

4° Bootstrap

On désigne ainsi, en anglais et en mathématiques, l'activité consistant à essayer de monter en tirant très fort vers le haut sur des sangles (*straps*) passées sous les chaussures (*boots*).

La preuve du paragraphe 3° n'est pas complète : on calcule sans vergogne f en (t_n, u_n) et (t_n, y_n). Pour $f(t_n, u_n) = f(t_n, u(t_n))$, c'est possible car l'hypothèse stipule que le problème de Cauchy a une solution sur $[0, T]$. En revanche, rien ne garantit que (t_n, y_n) soit dans Ω ! Dans l'exemple suivant, f est définie uniquement sur le domaine Ω grisé : comment peut-on calculer y_4, vu que $f(t_3, y_3)$ n'est pas défini ?



On peut s'en tirer de deux façons au moins. La première consiste à prolonger f en une fonction sur $\mathbb{R}^2$ entier. Mais c'est pénible à faire en sorte que le prolongement soit toujours $\mathcal{C}^1$ et lipschitzien.

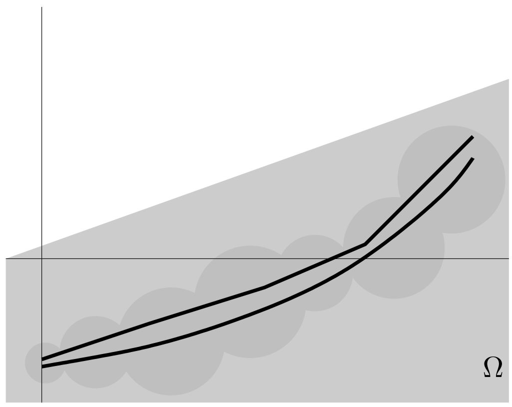
La deuxième méthode consiste à se tirer sur les bretelles... Comme $[0, T]$ est compact et u continue, le graphe de u possède un voisinage compact K inclus dans Ω.[2] On donne enfin un sens précis à M en posant

$$M = \max_K \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \max_K |f| \ \max_K \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

Ensuite, on choisit $|y_0 - u_0|$ et h assez petit pour que

$$\forall n,\ \forall y \in [u_n - \Delta, u_n + \Delta], \quad (t_n, y) \in K,$$

avec $\Delta = e^{LT}|y_0 - u_0| + \frac{Me^{LT}}{L}\, h$.



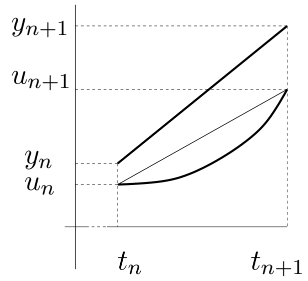
Alors, la preuve de 3° peut être complétée ainsi. On prouve par récurrence que pour tout n, y_n est bien défini et satisfait l'inégalité (§), la dernière de 3°. C'est trivial pour $n = 0$, par les

[2]Construction : pour $t \in [0, T]$, on choisit $\eta(t) > 0$ tel que la boule de centre $(t, u(t))$ et de rayon $\eta(t)$ soit contenue dans Ω. Or, par compacité de $[0, T]$ et continuité de u, le graphe de u est compact : on extrait un nombre fini des boules précédentes qui recouvrent le graphe ; la réunion de l'adhérence de ces boules convient.

choix faits ci-dessus. Supposons que pour un certain n, on ait défini y_n qui satisfait (§). Cette inégalité est suffisante pour assurer l'existence de y_{n+1}, ce qui donne un sens aux calculs de 3°, et prouve l'inégalité (§) au rang $n+1$.

5° Majoration uniforme

Rien de spécifique à la méthode d'Euler dans ce paragraphe.



La corde qui intercepte la courbe de u est la courbe de la fonction

$$v(t) = \frac{u_{n+1} - u_n}{t_{n+1} - t_n}(t - t_n).$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout $t \in [t_n, t_{n+1}]$:

$$|u(t) - v(t)| \leq (t - t_n) \max_{[t_n, t_{n+1}]} |u'| \leq h \max_{[0,T]} |u'|.$$

$$\left| \frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n}(t - t_n) - \frac{u_{n+1} - u_n}{t_{n+1} - t_n}(t - t_n) \right| \leq (|y_{n+1} - u_{n+1}| + |y_n - u_n|) \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \leq 2C(h + |y_0 - u_0|).$$

(En fait, l'écart maximal entre les deux droites est atteint au bord de l'intervalle, on pourrait remplacer le premier + par un max.)

Reformulé en termes plus snobs, on a prouvé :

$$\max_{[0, \lfloor \frac{T}{h} \rfloor h]} |u - \hat{u}| \leq C'(h + |y_0 - u_0|) \quad \text{où } C' = 2C + \max_{[O,T]} |u'|.$$

En d'autres termes, notre approximation tend uniformément vers la solution lorsque le pas et l'approximation initiale tendent vers zéro. Si vous avez suivi jusque là, vous pouvez faire un énoncé plus clair

6° Légitimité de l'hypothèse de Lipschitz

Il faut savoir que c'est l'hypothèse qui intervient naturellement dans la démonstration du théorème de Lipschitz global, si on veut des solutions en temps arbitrairement long (sur $[0, T]$ pour T arbitrairement grand).

Le problème est illustrée par l'équation différentielle

$$y' = y^2,$$

qui correspond à $f(t, y) = y^2$. Cette fonction polynômiale est, du point de vue de la différentiabilité, aussi régulière qu'on peut l'espérer, sur $\mathbb{R}^2$ entier. Pourtant, ce type de régularité n'empêche pas l'existence de solutions "pathologiques", au sens que leur intervalle de définition n'est pas $\mathbb{R}^+$.

En effet, pour $u_0 > 0$, la solution u telle que $u(0) = u_0$ satisfait, sur un voisinage de 0 sur lequel u ne s'annule pas :

$$\frac{u'(t)}{u(t)^2} = 1, \quad \text{donc } -\frac{1}{u(t)} + \frac{1}{u_0} = t,$$

dont on déduit

$$u(t) = \frac{u_0}{1 - u_0 t}.$$

Cette fonction est définie au mieux sur $[0, u_0^{-1}]$.