CHAPITRE 2

Suites et séries de fonctions.

Exercice 2.1
Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) dans chacun des cas suivants :

1. $f_n(x) = e^x + \dfrac{\sin nx}{n + e^x}$
2. $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \quad (n \geq 1)$.

Dans le deuxième cas étudier aussi la convergence uniforme sur un segment borné $[a\,, b]$.

Exercice 2.2
Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_n$ définie par

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$$

1. Sur l'intervalle $[0\,, +\infty[$.
2. Sur l'intervalle $[a\,, +\infty[. \quad (a > 0)$

Exercice 2.3
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}$.

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout segment borné $[a\,, b]$.
3. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $[a\,, +\infty[$.
4. Calculer la limite, lorsque $n \to \infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$.

Exercice 2.4 Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^2 \sin \frac{1}{nx} \quad \text{si } x \neq 0 \qquad et\ f_n(0) = 0.$$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Montrer qu'elle converge uniformément sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'elle n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.5

1. Déterminer la limite simple des fonctions $f_n : x \mapsto -> \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ sur $\mathbb{R}^+$ et montrer qu'il y a convergence uniforme. (On admettra la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$)
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} f_n(t)\ dt$. Quel commentaire cela vous inspire t'il ?

Exercice 2.6
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = (x^3+1)\frac{ne^x + x^{-x}}{n+x}\cdot$$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Montrer que cette suite est uniformément convergente.
3. En déduire $\lim_{n\to\infty} I_n$ avec $I_n = \displaystyle\int_0^1 (x^3+1)\frac{ne^x + x^{-x}}{n+x}$

Exercice 2.7
Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}\cdot$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ et $\lim_{n\to\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniformément convergente sur [0,1].
3. Donner une démonstration directe de ce que la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniformément convergente sur [0,1]

Exercice 2.8
Donner un exemple d'une suite de fonctions continues $(f_n)_n$ définies sur [0,1], convergeant simplement vers la fonction nulle, telle que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \infty$.

Exercice 2.9
On définit la suite $f_n \ : \ \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ par : $\begin{cases} f_0(x) = x, \\ f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(f_n(x) + \dfrac{x}{f_n(x)}\right). \end{cases}$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, et tout $x > 0$, $f_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(f_n(x) - \sqrt{x})^2}{f_n(x)}$
2. En déduire que, pour chaque valeur fixée de x, la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est décroissante, puis que (f_n) converge simplement vers $f = x \mapsto \sqrt{x}$.
3. Montrer que (f_n) converge uniformément sur chaque fermé $[0, A]$.
4. Demontrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^{+*}$ (on pourra expliciter, par récurrence sur n, un minorant simple de $f_n(x)$ qui est un monôme de degré 1 en x).

Exercice 2.10 (Limite de $f_n(x_n)$)
Soit I un intervalle réel, et (f_n) une suite de fonctions continues à valeurs complexes, qui converge simplement vers une fonction f, et (x_n) une suite de points de I qui converge vers un point $x \in I$.

1. Si les fonctions f_n convergent uniformément, montrer que $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
2. Donner un contre-exemple lorsqu'il y a seulement convergence simple.

Exercice 2.11
Soit $p \in \mathbb{N}$, $[a, b]$ un intervalle fermé borné, et (f_n) une suite de fonctions polynômes sur $[a, b]$, de degrés $\leq p$, qui converge simplement vers f. Soit $a \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_p \leq b$ une suite de points distincts de $[a, b]$.

1. On rappelle la définition des polynômes d'interpolation de Lagrange $(L_i)_{0\leq i\leq p}$ associés à la suite (a_i),
$$L_i(X) = \frac{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{p}(X - a_j)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{p}(a_i - a_j)}.$$
Démontrer que si g est une fonction polynôme de degré $\leq p$ sur $[a, b]$, alors
$$g(t) = \sum_{i=0}^{p} g(a_i)L_i(t).$$
2. Montrer que f est encore une fonction polynôme de degré $\leq p$. Pour toute fonction polynôme complexe g, on note $A_k(g)$ le coefficient de x^k dans g (ceci est un abus de langage, pourquoi ?). Prouver que, pour $0 \leq k \leq p$, $A_k(f) = \lim_{n\to\infty} A_k(f_n)$.
3. Montrer que la suite (f_n) est uniformément convergente.

Exercice 2.12 (Centrale MP 2002)
Soit $f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et 2π-périodique.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{t=0}^{n} f(x+t)f(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite (F_n) converge vers une fonction F que l'on précisera.
2. Nature de la convergence ?
3. Prouver $\|F\|_\infty = |F(0)|$ (**Indication :** Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Exercice 2.13 (Convergence uniforme et composition)
Soient I et J deux intervalles réels (non nécessairement bornés), et (g_n) une suite de fonctions de I dans J qui converge uniformément vers une fonction g. Soit $f \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$ et (h_n) la suite définie par $h_n = f \circ g_n$.

1. Montrer que si J est un intervalle fermé borné, la suite (h_n) est uniformément convergente.
2. Montrer que si J n'est pas un intervalle compact la suite h_n n'est pas nécessairement uniformément convergente.

Exercice 2.14
Étudier la convergence simple, la convergence normale, et enfin la convergence uniforme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$, sur $]1,\ +\infty[$ et sur $[a,\ +\infty[$ avec $a > 1$.
2. $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$, sur $[0,\ +\infty[$ et sur $[0, a]$.
3. $u_n(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{n^2+x^2}$, sur $[0,\ +\infty[$.

Exercice 2.15

1. Étudier la convergence de la série $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{1+x^n}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. Tracer la courbe représentative de f sur $]1, +\infty[$.

Exercice 2.16
Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où

$$u_n(x) = \log\frac{n}{1+n} + \frac{1}{x+n}$$

converge sur $[0, +\infty[$ vers une fonction de classe C^1 dont la dérivée est < 0.

Exercice 2.17
Donner un exemple simple d'une série de fonctions qui est uniformément convergente, sans être normalement convergente (on pourra penser à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, en tout x donné, il existe au plus une valeur de n telle que $u_n(x) \neq 0$).

Exercice 2.18
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$ avec $u_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$ pour $x \in [0\,,+\infty[$.

1. Etudier la convergence simple de cette série.
2. Montrer qu'elle n'est pas normalement convergente.
3. Donner un majorant du reste d'ordre n, $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)$ et en déduire qu'elle est uniformément convergente.

Exercice 2.19
Soit (λ_n) une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim(\lambda_n) = +\infty$. On considère la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n(x) = (-1)^n e^{-\lambda_n x}$.

1. Etudier la convergence simple de cette série.
2. Pour tout $x > 0$ on note $S(x)$ la somme de cette série. Monter que $0 \leq S(x) \leq e^{-\lambda_0 x}$.
3. Soit $R_n(x) = \sum_{k>n} u_k(x)$ le reste d'ordre n de cette série. Montrer que pour $x > 0$ on a $|R_n(x)| \leq e^{-\lambda_{n+1} x}$. Quel est le signe de $R_n(x)$?
4. En déduire que pour tout $a > 0$ la série $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$ et que sa somme est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2.20 Soit $\alpha \geq 0$. On considère la suite u_n de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^\alpha e^{-nx} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que la série de terme général u_n converge simplement et calculer sa somme.
2. Démontrer que cette série converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
3. Etudier selon les valeurs de α la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2.21 Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction que l'on notera f.
2. Majorer convenablement le reste de la série, et montrer qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
3. Y a-t-il convergence normale ?

Exercice 2.22
Soit $u_n \ : \ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}\dfrac{x^n}{1+x}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est simplement convergente.
2. Majorer le reste d'ordre $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)$ par le théorème des séries alternées.
3. En déduire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est uniformément convergente.

Exercice 2.23
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{atan}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ et que sa somme est une fonction de x impaire, continue et bornée.

Exercice 2.24
Soit pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $]-\pi,\ \pi[$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n \cos nx}{n+1}$.

1. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est simplement convergente.
2. Prouver que la convergence est uniforme sur tout compact contenu dans $]-\pi,\ \pi[$.

Exercice 2.25

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$, où $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n} + \cos(nx)}$, converge uniformément sur tout intervalle $[\alpha, \pi - \alpha]$, avec $0 < \alpha < \pi/2$.
2. En minorant la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} u_k(\pi/4n)$, montrer que cette série n'est pas uniformément convergente sur $[0, \pi/2]$.

Exercice 2.26 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1]$ on pose $u_n(x) = \dfrac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers une fonction f.
2. Justifier la dérivabilité de f sur $]-1, 1[$ et démontrer que, pour $x \in]-1, 1[$
$$f'(x) = \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{1 + x^2 - 2\cos x}.$$
3. En déduire que
$$f(x) = \operatorname{atan}\left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x}\right).$$
4. En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$.

Exercice 2.27
Pour $n \in \mathbb{N}$ et x réel soit $f_n(x) = \big(\operatorname{atan}(x + n) - \operatorname{atan}(n)\big)$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est uniformément convergente su $\mathbb{R}$, et que sa somme f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Expliciter une relation simple entre $f(x)$ et $f(x + 1)$ (**Réponse** : $f(x + 1) = f(x) + \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{atan} x$).
3. Expliciter $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
