Séries entières.

Exercice 3.1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} z^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1.3\ldots(2n+1)} z^{2n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n! z^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$$

Exercice 3.2
Calculer le rayon de convergence et la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ (pour le calcul de la somme on écrira $n^2 = n(n-1)+n$).

Exercice 3.3 Démontrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n} e^{-nx}$ converge pour tout réel x positif et calculer sa somme.

Exercice 3.4 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries :

$$\sum a_n^2 z^n, \qquad \sum \frac{a_n}{n!} z^n, \qquad \sum \frac{n!\, a_n}{n^n} z^n.$$

Pour la troisème série on pourra utiliser la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3.5 Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3}{2n+1} x^n.$$

Exercice 3.6 On pose $a_n = 1 + 1/2 + 1/3 \ldots + 1/n$.

1. Rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$?
2. Soit $f(x)$ la somme de cette série. En utilisant la relation $a_n = a_{n-1} + 1/n$, montrer que $xf(x) - f(x)$ est la somme d'une série entière simple.
3. En déduire $f(x)$.

Exercice 3.7 Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} z^n$.

Réponse : $1 - \left(1 - \dfrac{1}{z}\right) \log(1-z)$.

Exercice 3.8 (Vrai ou faux)
Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence, autrement dit, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est convergente si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n$ est convergente.
3. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
4. Il existe une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R, $0 < R < \infty$, qui ne converge en aucun des points de la frontière du disque de convergence.
5. Il existe une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R, $0 < R < \infty$, qui converge en tous les points de la frontière du disque de convergence.
6. Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients positifs ou nuls, qui n'est pas un ponynôme et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors pour tout $\alpha > 0$, $x^\alpha = o(f(x))$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3.9 Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n(n+2)} = 4\log 2 - 2$.

Exercice 3.10

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$?
2. Montrer que cette série converge uniformément sur $[-1, a]$ pour tout $a < 1$ (on utilisera le théorème des séries alternées).
3. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
4. En utilisant la méthode de sommation d'Abel, montrer que si $0 < r < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ converge uniformément sur $D_r = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| \leq 1, \ |1-z| \geq r\}$.

Exercice 3.11
Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3n+2}$?

1. Montrer que cette série converge uniformément sur $[-1, a]$ pour tout $a < 1$.
2. En déduire que la somme de cette série est continue sur $[-1, 1[$ puis la valeur de
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$$
3. Montrer que, pour tout r satisfaisant $0 < r < 1$, la convergence est uniforme sur $D_r = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| \leq 1, \; |1-z| \geq r\}$.

Exercice 3.12

1. Montrer que la fonction $\frac{\sin t}{t}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter ce développement.
2. Prouver que
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}.$$
3. En déduire la valeur approchée $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = 1.8519\ldots$

Exercice 3.13 On considère l'équation différentielle $3xy' + (2-5x)y = x$.

1. Montrer qu'elle admet une unique solution développable en série entière au voisinage de 0, $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, et que cette série entière est de rayon de convergence infini.
2. Expliciter les a_n. **Réponse** : $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-2} x^n}{\prod_{2 \leq k \leq n} (3k+2)}$.
3. On note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$ les reste d'ordre n de la série entière de somme $y(x)$. Montrer que, lorsque $3n + 8 > 5|x|$ on a
$$|R_n(x)| \leq a_{n+1} |x|^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{5|x|}{3n+8} \right)^{k-n-1} \leq a_{n+1} |x|^{n+1} \frac{3n+8}{3n+8-5|x|}$$
4. **Application** : Calculer $y(1)$ à 2.10^{-5} près.

Exercice 3.14 Déterminer (a_n) de sorte que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit définie au voisinage de 0 et solution de l'équation différentielle
$$4xy'' + 2y' + y = 0.$$
Calculer le rayon de convergence et la somme des séries obtenues. Remarquer que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? Est-ce en contradiction avec les théorèmes généraux sur les équations différentielles linéaires ?

Exercice 3.15 Développement en série entière au voisinage de 0 de :

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)} \qquad f(x) = \mathrm{ch}(x)\cos(x)$$

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x} \qquad f(x) = \mathrm{atan}(x+a) \qquad (a > 0)$$

$$f(x) = \log\left(1 - 2x\cos a + x^2\right) \qquad f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^p$$

Pour le (4) on posera $a + i = re^{i\alpha}$, $r > 0$. Pour le (6) on cherchera, au moyen de deux dérivations successives, une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par f.

Exercice 3.16 On note T_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

1. Montrer que $T_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k T_k$.
2. Prouver que que $T_n/n! \leq 1$ pour tout n. En déduire que le rayon de convergence R de la série entière est au moins égal à 1.
3. Montrer que pour $|x| < R$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n x^n}{n!} = e^{e^x - 1}$.

   Remarque : La fonction $z \mapsto e^{e^z - 1}$ est dérivable (holomorphe) sur $\mathbb{C}$ tout entier. Il en résulte, mais ceci n'est pas au programe du CAPES, qu'elle est développable en série entière de rayon de convergence infini.

Exercice 3.17
On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{C_{2n}^n}$.

1. Déterminer son rayon de convergence R et montrer que f définie sur $]-R,\, R[$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{C_{2n}^n}$ est solution de l'équation : $x(4-x)f' - (x+2)f = -2$.
2. Résoudre l'équation homogène $x(4-x)u' - (x+2)u = 0$ sur l'intervalle $]0,\, 4[$.

   Réponse : $u(x) = k\sqrt{x}(4-x)^{-3/2}$
3. Prouver que, pour $x \in \,]0,\, 4[$,
$$f(x) = 4\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \mathrm{atan}\sqrt{\frac{4-x}{x}} + c\right)$$
4. Démontrer (soigneusement) que $c = \pi/2$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{2n}^n}$.

   $\left(\textbf{Réponse} : \dfrac{4}{3} + \dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}\right)$
