CHAPITRE 4

Séries de Fourier.

Exercice 4.1
On considère les fonctions 2π-périodiques $f\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, définies par

1. $f(x) = x$ si $x \in]-\pi, \pi[$ et $f(\pi) = 0$.
2. $f(x) = |\sin(x)|$ pour $x \in]-\pi, \pi[$.
3. $f(x) = e^x$ si $x \in]-\pi, \pi]$.
4. $f(x) = \operatorname{ch} x$ si $x \in]-\pi, \pi]$.

Pour chacune d'entre elles, expliciter la série de Fourier, étudier la convergence simple et uniforme de cette série, et écrire l'identité de Parseval.

Exercice 4.2
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ satisfaisant $f(0) = f(1)$ et $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Soit g l'unique fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 1 qui prolonge f.

1. Quelle relation simple relie les coefficients de Fourier $c_n(g)$ et $c_n(g')$?
2. En déduire que
$$\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t \geq 4\,\pi^2 \int_0^1 (f(t))^2\,\mathrm{d}t.$$
3. Que peut on dire de f lorsque cette inégalité est une égalité ?

Exercice 4.3 Soit $a > 0$.

1. Développer en série entière : $f(x) = \dfrac{1}{x + e^a}$.
2. En déduire le développement en série de Fourier de $g(x) = \dfrac{1}{\cos x + \operatorname{ch} a}$.

Exercice 4.4

1. Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \sin nx$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, 2π–périodique et continue, dont elle est la série de Fourier.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur chaque intervalle $](2k-1)\pi,\ (2k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4.5

1. (a) Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{int}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction 2π–périodique complexe f.
   (b) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle
   $$y''(t) - y(t)e^{it} = 0. \qquad (E)$$
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une solution 2π–périodique de classe C^2 de l'équation (E). On désigne par $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{int}$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g'')e^{int}$ les séries de Fourier respectives de g et g''.
   (a) Exprimer le coefficient de Fourier $c_n(g'')$ en fonction du coefficient de Fourier $c_n(g)$.
   (b) En utilisant l'équation (E) , exprimer $c_n(g'')$ en fonction de $c_{n-1}(g)$, pour $n \in \mathbb{Z}$.
   (c) En déduire que l'ensemble des solutions 2π–périodiques de (E) est l'espace vectoriel réel de dimension 1 engendré par la fonction f.

Exercice 4.6 Soit f, 2π-périodique, définie par $f(x) = x\sin(x/2)$ pour $0 \leq x < 2\pi$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f ?
3. En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$. $\Big($**Réponse** : $\frac{\pi-2}{4}\Big)$.

Exercice 4.7 (Décomposition de sin(x) en produit infini.)

1. Soit α un réel **non entier**. Montrer que la série de Fourier de la fonction $f\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie par $f(t) = \cos(\alpha t)$, pour $t \in [-\pi, \pi]$ est la série :
   $$\frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi}\left[1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nt.\right]$$
   Etudier sa convergence simple, et uniforme.

2. Démontrer les égalités :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \\ \pi \cot \alpha\pi &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}\end{aligned}$$

3. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi$ on a $\cot t = \dfrac{1}{t} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$ et que la série figurant au second membre est uniformément convergente sur tout intervalle $[-a, a]$ pour $0 < a < \pi$.
4. Démontrer que la fonction h définie sur $]-\pi, +\pi[\setminus \{0\}$ par $h(t) = \ln\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $]-\pi, +\pi[$ de dérivée $\cot t - 1/t$ (prolongée par 0 en 0).
5. En déduire que, pour $x \in]-\pi, \pi[$, on a

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} x \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

Exercice 4.8 (Le phénoméne de Gibbs)
Soit f 2π-périodique impaire, définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in]0, \pi[\\ 0 & si\ x = k\pi \end{cases}$$

1. Expliciter la série de Fourier de f. Prouver qu'elle converge simplement vers f.
2. Soit S_n la $(2n-1)^{eme}$ somme partielle de la série de Fourier de f,

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Démontrer que S_n est dérivable, avec, pour tout x

$$S_n'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \dfrac{\sin 2nx}{\sin x} & \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi \\ (-1)^q \dfrac{4n}{\pi} & \text{pour } x = q\pi. \end{cases}$$

En déduire que S_n présente $(2n-1)$ extrema locaux sur l'intervalle $[0, \pi]$. Montrer que le premier d'entre eux est un maximum, qu'on notera a_n et qu'il est atteint en $x = \dfrac{\pi}{2n}$.

3. Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi[$ $S_n(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ (en convenant que, pour $t = 0$ la valeur de $\sin(2nt)/\sin t$ est $2n$). En déduire que

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{(2n)\sin\frac{t}{2n}}\,\mathrm{d}t$$

(en convenant que, pour $t = 0$ la valeur de $\sin(t)/(2n\sin(\frac{t}{2n}))$ est 1).

4. Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$
5. Montrer que
$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = 1.85193\ldots$$
et en déduire que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1.1789\ldots$

Exercice 4.9

1. Soit une série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, uniformément convergente sur un intervalle I. Démontrer que les u_n sont bornées pour n suffisamment grand, et que $\|u_n\|_\infty$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
2. Soit I un intervalle de longueur au moins égale à π, et a, b deux réel quelconques. Montrer que le maximum de $|a\cos x + b\sin x|$ sur l'intervalle I est $\sqrt{a^2+b^2}$.
3. Soit I un intervalle $[\alpha, \beta]$ de longueur strictement positive. On suppose que la série
$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$
est uniformément convergente sur I. Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Exercice 4.10

On considère la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin nx$

1. Montrer qu'elle converge uniformément sur $[a, 2\pi - a]$ pour tout a, $0 < a < \pi$.
2. En déduire que cette série converge simplement ver une fonction 2π-périodique f, impaire et continue sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
3. Calculer
$$\lim_{a\to 0}\int_a^{\pi-a} f(t)\sin(pt)\,\mathrm{d}t.$$
4. En déduire que f n'est pas continue en 0.
