CHAPITRE 5

Equations différentielles.

Exercice 5.1 Résoudre les équations différentielles

$$xy' - y = \ln x \qquad (x-1)y' + y = \frac{1}{x}$$

$$y' - xy = x \qquad xy' - y = -x\sin x - \cos x$$

Exercice 5.2
Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}$, les équations differentielles

$$\begin{aligned} t^2x' + x &= 0 \\ t^3x' - 2x &= 0 \\ t^3x' + 2x &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 5.3 Résoudre les équations differentielles

1. $x'' + 2x' + x = te^t$
2. $x'' + x' + x = (t+2)e^t$

Exercice 5.4 Résoudre l'équation differentielle $x' = x + te^{2t} + \sin t$

Exercice 5.5 Résoudre

1. $x'' - 2x' + 5x = e^t \cos t$
2. $x'' - 2x' + 5x = e^t \cos 2t$

Exercice 5.6 Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos^2 x}$$

Exercice 5.7 Résoudre l'équation differentielle

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

sachant qu'elle admet la solution $y = \cos\sqrt{x}$ (cf. le chapitre sur les séries entières).

Exercice 5.8
Résoudre l'équation differentielle

$$(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^{-x}$$

en remarquant que $x \mapsto e^x$ est solution de l'équation homogène associée. On touvera $y = \frac{1}{2}(1+x)\, e^{-x} + a\, e^x + b\,(5 + 6x + 2x^2)e^{-x}$

Exercice 5.9
Chercher les solutions développables en série entières au voisinage de 0, puis toutes les solutions de

$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$

Exercice 5.10
Résoudre l'équation

$$x(x+1)y'' - y' - 2y = 3x^2.$$

On pourra chercher une solution de l'équation homogène de la forme x^α.

Exercice 5.11

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = +\dfrac{3}{2}\,x_1 - \dfrac{1}{2}\,x_2 - \dfrac{1}{2} \\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{1}{2}\,x_1 + \dfrac{3}{2}\,x_2 - \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

2. Quelle est l'unique solution satisfaisant $x_1(0) = y_1(0) = 1$.
3. Prouver que le point $M(t) = (x_1(t), x_2(t)$ se déplace sur une conique $\mathcal{C}$. Préciser la nature de cette conique et la portion de $\mathcal{C}$ décrite par $M(t)$.

Exercice 5.12
Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f.
2. Soit $\varepsilon_2 = e_2$ et $\varepsilon_1 = (A - 2)\varepsilon_2$. Quelle est la matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$?
3. Calculer $\exp(tA)$ pour tout réel t.
4. Application : Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8x + 4y, & x(0) = x_0 \\ \dfrac{dy}{dt} = -9x - 4y, & y(0) = y_0 \end{cases}$$