CHAPITRE 6

Intégrales impropres

Exercice 6.1
Soit f continue réelle sur $[0, +\infty[$ telle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

1. Montrer que, pour $T > 0$ on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+T} \mathrm{d}t = 0$.
2. Montrer que f n'est pas necessairement bornée.
3. Montrer que si $f(t)$ admet une limite L lorsque t tend vers l'infini alors $L = 0$.
4. Montrer que si f est uniformément continue alors $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
5. Montrer que si f est monotone alors $f(t) = o(1/t)$ lorsque t tend vers l'infini.
6. Donner un exemple de fonction positive décroissante g satisfaisant $g(t) = o(1/t)$ quand $t \to +\infty$ et telle que l'intégrale $\int_2^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ soit divergente.

Exercice 6.2
Donner au moins deux démonstrations simples de la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$.

Exercice 6.3 Soit f continue, T-périodique, $a > 0$,

$$m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad M = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que F est bornée si $m = 0$, et sinon $F(x) \sim_\infty mx$.
2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $m = 0$.
3. On suppose $m = 0$. Démontrer que si f n'est pas la fonction identiquement nulle, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente. De plus, on a l'équivalence

$$\int_a^x \frac{|f(t)|}{t}\,\mathrm{d}t \sim_{+\infty} M \ln x.$$

4. Donner un équivalent simple de $\displaystyle\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 6.4 Prouver l'existence, et calculer la valeur de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)} \qquad (n \geq 2)\cdot$$

Exercice 6.5
Prouver la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos t^2\,\mathrm{d}t$ en écrivant

$$\int_1^X \cos t^2\,\mathrm{d}t = \int_1^X \frac{1}{2t}(\cos t^2)2t\,\mathrm{d}t.$$

Plus généralement prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(P(t))\,\mathrm{d}t$ converge pour tout polynôme réel P de degré supérieur ou égal à 2.

Exercice 6.6
Soit

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+u^n)} \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{u^n\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+u^n)}.$$

Prouver que ces intégrales convergent, puis calculer leurs valeurs.

Indication : Considérer le changement de variable $u = 1/v$ et la somme $I + J$.

Exercice 6.7 Soit $a > 1$. Discuter selon les valeurs des réels α et β la nature des intégrales de Bertrand

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln^\beta t}$$

Exercice 6.8 Nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)(\ln\ln t)} \qquad (a > e).$

Exercice 6.9

1. Soit $f : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(t) = o(e^t)$ au voisinage de l'infini et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ soit convergente. Que pouvez-vous dire de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$?
2. **Application :** Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6.10 Etudier la convergence, éventuellement la valeur, des intégrales impropre suivantes

$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ Indication : Changement de variable $u = 1/t$.

$\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ Indication : Calculer une primitive de l'intégrand.

Exercice 6.11
Discuter selon la valeur de a la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^a}\,\mathrm{d}t$

Exercice 6.12
Nature des intégrales impropres

$$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(\ln t))^{\ln t}} \qquad \int_0^{+\infty} \sin(\sin t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6.13
Prouver que les deux intégrales impropres

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$$

sont convergentes, et que $J = K$. En considérant $I = J+K$ prouver que $J = -\pi \ln 2/2$.

Exercice 6.14

1. Montrer que pour $t \geq -n$ on a $(1+t/n)^n \leq e^t$.
2. Prouver que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t\cdot$$

3. Au moyen des changements de variables $t = \sqrt{n}\sin\theta$ et $t = \sqrt{n}\tan\theta$ et en utilisant l'équivalence de Wallis

$$\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$
