Université Claude Bernard–Lyon I
CAPES de Mathématiques : Arithmétique
Année 2006–2007

Développement décimal

I Partie entière

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. C'est l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$.

1° CAPES 1977 (extrait)

Justifier, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, l'existence et l'unicité d'un élément $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$(2n-1)\,\pi \leq x < (2n+1)\,\pi.$$

2° (Délicat)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.
On pourra commencer par le cas où $4n+2$ n'est pas un carré, puis remarquer que $4n+2$ n'est jamais un carré. (Source : *Cours d'arithmétique*, Bornsztein, Caruso, Nolin, Tibouchi.)

3° Théorème de Beatty

Soit α, β deux réels strictement positifs. Les parties $\{\lfloor n\alpha \rfloor \ :\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et$\{\lfloor n\beta \rfloor \ :\ n \in \mathbb{N}^*\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si α et β sont irrationnels et $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

II Numération : bases

1° Françoise, spécialiste mondialement reconnue des identités remarquables, écrit dans sa copie :

$$(5x+3)(3x-7) = 13\,x^2 - 22x - 19.$$

Pouvez-vous l'expliquer ? (Source : [BCNT].)

2° Le magicien dispose des cartes suivantes :

1	3
5	7
9	11
13	15

2	3
6	7
10	11
14	15

4	5
6	7
12	13
14	15

8	9
10	11
12	13
14	15

Le spectateur choisit un nombre entre 1 et 15, et doit dire sur quelle(s) carte(s) il se trouve. Comment le magicien peut-il (fièrement, n'en doutons pas !) retrouver le nombre choisi ?

3° (Pas si facile) (Source : [BCNT].) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

4° (Source : [BCNT].) On écrit les puissances de 10 en base 2 et en base 5 dans un tableau :

base 2	base 5
1010	20
1100100	400
1111101000	13000
10011100010000	310000

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, ce tableau comporte exactement un nombre de n chiffres.

III Développement décimal des entiers

1° Calculer en moins de 15 secondes 123456789×9. (Source : A. Chambert-Loir@Rennes.)

2° Combien de chiffres faut-il pour écrire tous les nombres de 1 à 2005 ? S'il faut écrire 3189 chiffres pour paginer un livre, combien y a-t-il de pages dans ce livre ? (Même source.)

3° Nombre de chiffres d'un nombre (naturel en base 10)

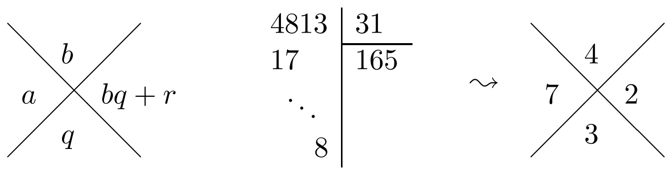
a) Comment trouver le nombre de chiffres d'un nombre en base 10 ?
b) Evaluer sans machine le nombre de chiffres de 2^{54}, de 11^{12} et de 11^{54}.

4° "Somme des chiffres itérée"

a) Etant donné un entier naturel, on calcule la somme des chiffres de la somme des chiffres de *etc.* de ce nombre. Formaliser, et justifier qu'on aboutit à un nombre à 1 chiffre.
Dans les exercices qui suivent, on l'appellera somme des chiffres itérée du nombre de départ.
b) Comment peut-on caractériser autrement la somme itérée ?
c) Est-ce que la somme des chiffres itérée est compatible avec les opérations ? (Sens ?)

5° Preuve par 9

Faire la preuve par 9 d'une opération (addition, multiplication ou plutôt division), c'est faire l'opération en remplaçant chaque nombre par la somme de ses chiffres itérée. Si cette nouvelle opération est fausse, c'est qu'il y a une erreur dans l'opération de départ. On dispose généralement les calculs sur une croix.
Voici un exemple avec une division, disons $a = bq + r$. Ci-dessous, la somme des chiffres itérée de a n'est pas la même que la somme des chiffres itérée de $bq + r$, il y a donc une erreur :



a) Comprendre et refaire les calculs.
b) Justifier la preuve par 9.

6° Un joyau

On note $A = 4444^{4444}$, B la somme des chiffres de A, C la somme des chiffres de B, et D la somme des chiffres de C. Calculer D.

7° Soit m un nombre premier impair dont le dernier chiffre n'est pas un 5. Montrer que m a un multiple qui ne s'écrit qu'avec des 9 ; qu'avec des 1 ; qu'avec des 6.

IV Développement décimal de $1/p$ (d'après O. Mathieu@Lyon)

1° Développement décimal des rationnels

a) Quel sens donner à l'écriture décimale illimitée 0,2199999999... ?
b) Qu'est-ce que le développement décimal d'un réel ? Comment le calcule-t-on ? Quel est le développement décimal (propre) du réel précédent ?
c) Montrer qu'un réel est rationnel si, et seulement si son développement décimal est ultimement périodique. (Sens ?)
d) On veut préciser le résultat précédent. Montrer que tout rationnel x peut s'écrire sous la forme $10^v a/b$, où $v, a, b \in \mathbb{Z}$, $v \leq 0$, $b > 0$, a et b sont premiers entre eux, et ni 2 ni 5 ne divisent b. Montrer que n est la longueur d'une période du développement décimal de x si et seulement si b divise $10^n - 1$.

2° Un exemple amusant (d'après M. Mizony@Lyon)

On cherche le développement décimal de $1/9\,801$.
a) Factoriser $9\,801$. Avec le lemme chinois, montrer que l'ordre de 10 dans $\mathbb{Z}/9801\mathbb{Z}$ est 198.
b) En remarquant que $9\,801 = 10^2(1 - 10^{-2})^2$, déterminer le développement décimal à l'aide du développement en série entière de $(1 - t)^{-2}$.
c) Généralisation (d'après Ph. Caldero@Lyon). Déterminer de tête le développement décimal de $1/\underbrace{9\cdots9}_{d}8\underbrace{0\cdots0}_{d}1$.

3° Période du développement de $1/p$

Désormais, p est un nombre premier ≥ 7. Pour préciser le vocabulaire sur un exemple, avec

$$\frac{1}{7} = 0{,}142\,857\ 142\,857\ 142\,857\ \ldots$$

on dira que 142857 est une période du développement décimal de $1/7$, de longueur 6.
a) Montrer que n est la longueur d'une période du développement décimal de $1/p$ si et seulement si p divise $10^n - 1$ (déjà vu) et que le développement est purement périodique. (Sens ?)
b) En déduire une interprétation de la plus petite longueur possible en termes de groupes.
On étudiera plus loin le problème "inverse" : quels sont les nombres premiers p qui ont pour plus petite longueur de période un nombre n donné.
c) Observer les développements décimaux de $k/7$ pour $k = 0, \ldots, 6$. Comment interpréter le résultat ?
d) Etablir une relation entre la longueur de la plus petite période et le nombre de périodes distinctes de k/p, pour $k = 0, \ldots, p-1$.
(Ici, on identifie deux périodes obtenues l'une de l'autre par permutation circulaire. On pourra se donner des idées sur l'exemple de $p = 13$.)

4° Demi-mesures

Supposons que la longueur n d'une période de $1/p$ soit paire, disons $n = 2k$, mais que k ne soit pas la longueur d'une période :

$$\frac{1}{p} = 0,\underbrace{\overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}}_{n} = 0,\underbrace{\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_k}_{k}\ \underbrace{a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3} \cdots a_{2k}}_{k}}_{n}\ a_1 a_2 \cdots$$

a) Exemples : $p = 7, 11, 13$.
b) Montrer que l'on a :

$$\underbrace{\overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_k}}_{k} + \underbrace{\overline{a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3} \cdots a_{2k}}}_{k} = \underbrace{999 \cdots 9}_{k} = 10^k - 1.$$

5° Couper les cheveux en deux, trois, quatre ou plus

On généralise ce qui précède. On désigne par n la longueur d'une période de $1/p$, et on suppose que $n = \ell k$, où $\ell \geq 2$ et k n'est pas la longueur d'une période de $1/p$ (i.e. $10^k - 1$ non multiple de p). Dans l'écriture décimale de $1/p$, on forme des blocs de k chiffres

$$\frac{1}{p} = 0{,}A_{\ell-1} A_{\ell-2} \cdots A_1 A_0\ A_{\ell-1} A_{\ell-2} \cdots A_1 A_0 \cdots$$

Ainsi, $A_{\ell-1}, \ldots,$ A_0 sont des nombres entiers compris entre 0 et $10^k - 1$. Par exemple, pour $\ell = 2$, on a $A_1 = \overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_k}$ et $A_1 = \overline{a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3} \cdots a_{2k}}$.
Pour $i = 0, \ldots, \ell-1$, on note x_i le reste de la division de $10^{k(\ell-i)}$ par p, et $b = (x_0 + \cdots + x_{\ell-1})/p$.
a) Montrer que b est un entier et que l'on a :

$$A_{\ell-1} + \cdots + A_0 = b(10^k - 1) = b \times \underbrace{999 \ldots 9}_{k}.$$

b) Montrer que si ℓ vaut 2 ou 3, alors $b = 1$.
c) En prenant $p = 73$ et $\ell = 4$, montrer que la conclusion de b) est optimale.

6° Division de la droite vers la gauche

a) Soit p premier ≥ 7 et u le chiffre des unités de p. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m \equiv ku\,[\mathrm{mod}\,10]$.

b) Interpréter, généraliser et justifier l'opération suivante :

$$
\begin{array}{r|l}
999\,999 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{49} & 142\,857 \\
95 & \\
\underline{35} & \\
96 & \\
\underline{56} & \\
94 & \\
\underline{14} & \\
98 & \\
\underline{28} & \\
7 & \\
\underline{7} & \\
0 &
\end{array}
$$

La lecture de cette opération commence ainsi : "En 9, combien de fois 7 ? Eh bien, 7 fois, puisque $7 \times 7 = 49$. Comme $99 - 49 = 50$, j'oublie le 0, j'écris le 5 et j'abaisse un 9.
En 5, combien de fois 7 ? Eh bien, 5 fois, puisque $7 \times 5 = 35$. *Etc.*"

c) En déduire de tête le $42^{\text{ème}}$ chiffre de $1/43$ et le $70^{\text{ème}}$ chiffre de $1/71$.

V Polynômes cyclotomiques

1° Définition et propriétés standards

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des racines primitives n-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ (sens ?).
Le n-ème polynôme cyclotomique est le polynôme

$$\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in \mathcal{P}_n} (X - \zeta)$$

a) Rappeler pourquoi $\deg \Phi_n = \operatorname{card} \mathcal{P}_n = \varphi(n)$, l'indicatrice d'Euler.

b) Démontrer que l'on a :

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

Quelle relation retrouve-t-on en comparant les degrés ?

c) A priori, on a : $\Phi_n \in \mathbb{C}[X]$. Montrer par récurrence que l'on a en fait : $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

Remarque : On peut montrer que Φ_n est irréductible pour tout $n \geq 1$.

2° Facteurs premiers des nombres cyclotomiques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, p premier ne divisant pas n et $x \in \mathbb{Z}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) x est d'ordre n dans $(\mathbb{Z}/p)^*$;
(ii) $p|\Phi_n(x)$;
(iii) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $p|\Phi_{p^\alpha n}(x)$;
(iv) il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $p|\Phi_{p^\alpha n}(x)$.

3° Application à $1/p$

Déduire de ce qui précède une méthode pour trouver tous les nombres premiers qui admettent un entier donné n pour longueur de période du développement décimal.

Application numérique : $n = 6$, $n = 12$.