

---

**Fiche Espaces euclidiens 1**  
PRODUIT SCALAIRE-ORTHOGONALITÉ

---

Notions abordées

- Norme. Produit scalaire.
  - Inégalité de Minkowski.
  - Égalités de polarisation.
  - Bases orthonormées.
  - Inégalité de Cauchy-Schwarz.
  - Norme euclidienne.
  - Égalité du parallélogramme.
  - Projection orthogonale.
- 

Pour toute la suite,  $E$  désignera un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

▬ PARTIE I : Produit scalaire, norme euclidienne ▬

1 - Rappeler la définition d'une norme sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  :

Une **norme** sur  $E$  est une application  $\| \cdot \|$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$  vérifiant :

—

—

—

2 - Donner des exemples de normes sur  $\mathbb{R}^n$ , pour un entier  $n \geq 2$  fixé.

3 - Compléter la définition d'un produit scalaire.

Un **produit scalaire** sur  $E$  est une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  qui est :

— **symétrique**, c'est-à-dire :

— **bilinéaire**, c'est-à-dire :

— **définie positive**, c'est-à-dire :

4 - Rappeler la définition du produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ , pour un entier  $n \geq 2$  fixé.

5 -

**Inégalité de Cauchy-Schwarz.** Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur  $E$ . Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

6 - Montrons l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour cela, on fixe  $x$  et  $y$  dans  $E$  et on considère l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par  $f(t) = \langle x + ty, x + ty \rangle$ .

- (a) Vérifier que  $f$  est une fonction polynomiale de degré au plus 2, qui est toujours positive.
  - (b) Conclure en considérant son discriminant.
- 7 - Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si les vecteurs  $x$  et  $y$  sont colinéaires.
- 8 - Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ , pour un entier  $n \geq 2$  fixé.
- 9 - Montrer l'inégalité suivante :

**Inégalité de Minkowski.** Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur  $E$ . Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

- 10 - En déduire que pour tout produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $E$ , l'application  $\| \cdot \|$  de  $E$  vers  $[0, +\infty[$  définie pour  $x \in E$  par  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  est une norme.
- Cette norme issue du produit scalaire est appelé **norme euclidienne**. De plus, on appelle **espace euclidien** un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire et donc d'une norme euclidienne. Si l'espace n'est pas de dimension finie, on le dit **préhilbertien**.
- 11 - Soient deux réels  $a < b$ . Montrer que l'application qui à  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$  associe

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$$

est une norme euclidienne sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $C([a, b], \mathbb{R})$ . Cet espace est-il euclidien ?

- 12 - Soit un entier  $n \geq 1$ . Montrer que l'application que à  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  associe

$$\|M\| = \sqrt{\text{Tr}({}^tMM)}$$

est une norme euclidienne sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Cet espace est-il euclidien ?

Pour toute la suite, on fixe un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $E$  et on note  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne associée.

- 13 - **Égalités de polarisation.**

- (a) Pour tous éléments  $x, y$  de  $E$ , exprimer  $\|x + y\|^2$  et  $\|x - y\|^2$  en fonction de  $\|x\|$ ,  $\|y\|$  et  $\langle x, y \rangle$ .
- (b) En déduire une expression du produit scalaire en fonction de la norme euclidienne.

- 14 - Compléter :

la **distance** entre deux vecteurs  $x$  et  $y$  est  $d(x, y) =$

- 15 - **Égalité du parallélogramme.**

- (a) Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

- (b) En donner une interprétation géométrique.

———— PARTIE II : Orthogonalité. ————

Dans toute cette partie, on note  $E$  un espace euclidien,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire et  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne associés.

1 - Soit  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E$ . Compléter :

- Le vecteur  $x$  est unitaire si
- Les vecteurs  $x$  et  $y$  sont **orthogonaux** si
- Si  $E$  est de dimension  $n$ , une base orthonormée de  $E$  est

2 - Énoncer le théorème de Pythagore et le démontrer.

3 - **Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On

pose  $e'_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$  et on définit par récurrence sur  $i \in \{2, \dots, n\}$ ,

$$e'_i = \frac{e_i - \sum_{1 \leq k < i} \langle e_i, e'_k \rangle e'_k}{\left\| e_i - \sum_{1 \leq k < i} \langle e_i, e'_k \rangle e'_k \right\|}.$$

- (a) Montrer que  $(e'_1, \dots, e'_n)$  est une base orthonormée de  $E$ .
  - (b) En déduire que tout espace euclidien admet une base orthonormée.
  - (c) Vérifier que les vecteurs  $e_1 = (1, 1, 1)$ ,  $e_2 = (1, 1, -1)$  et  $e_3 = (0, 1, 2)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . Utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur cette base pour obtenir une base orthonormée.
- 4 - Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $x$  un vecteur de  $E$ . Compléter les définitions suivantes :

- Le vecteur  $x$  est **orthogonal** à  $F$  si
- L'**orthogonal** de  $F$  est  $F^\perp =$

5 - Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que

- (a)  $F^\perp$  est également un sous-espace vectoriel ;
- (b)  $E^\perp = \{0\}$  et  $\{0\}^\perp = E$  ;
- (c) La somme  $F + F^\perp$  est directe ;
- (d)  $F \subset (F^\perp)^\perp$  ;
- (e) Si  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $F \subset G$  alors  $G^\perp \subset F^\perp$ .

6 - Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_p)$  une base orthonormée de  $F$ .

- (a) Montrer que pour tout  $x \in E$ , on a  $x - \sum_{i=1}^p \langle x, f_i \rangle f_i \in F^\perp$ .

- (b) En déduire que  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires.
- (c) Montrer que  $(F^\perp)^\perp = F$ .

7 - Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  et  $x$  un vecteur de  $E$ . Exprimer les coordonnées de  $x$  dans cette base à l'aide du produit scalaire. Exprimer la norme de  $x$  en fonction de ses coordonnées.

### 8 - Hyperplan.

- (a) Rappeler la définition d'un hyperplan de  $E$ .
- (b) Comment appelle-t-on les hyperplans de  $\mathbb{R}^2$  et les hyperplans de  $\mathbb{R}^3$  ?
- (c) Rappeler la définition d'un **vecteur normal** à un hyperplan.
- (d) Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  et  $a$  un vecteur non nul de coordonnées  $(a_1, \dots, a_n)$ . Donner l'équation de l'hyperplan ayant  $a$  pour vecteur normal.

9 - **Projection orthogonale.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $E = F \oplus F^\perp$ , et si  $x$  est un vecteur de  $E$ , il existe ainsi un unique vecteur de  $F$ , noté  $p_F(x)$ , tel que  $x - p_F(x) \in F^\perp$ . Ce vecteur  $p_F(x)$  s'appelle **projeté orthogonal** de  $x$  sur  $F$ .

- (a) Montrer que  $p_F$  est un endomorphisme de  $E$ .
- (b) Déterminer le noyau et l'image de  $p_F$ .
- (c) Que vaut  $p_F^2$  ?
- (d) Que vaut  $p_F + p_{F^\perp}$  ?
- (e) Montrer que  $p_F$  est 1-lipschitzien.
- (f) Si  $(f_1, \dots, f_p)$  est une base orthonormée de  $F$ , donner une définition de  $p_F$  à l'aide de cette base orthonormée.
- (g) On rappelle que la distance d'un vecteur  $x$  à  $F$  est

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y).$$

Montrer que  $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$  et que pour tout  $y \in F$ , si  $y \neq p_F(x)$  alors  $d(x, y) > d(x, F)$ . En déduire une autre définition du projeté orthogonal.

10 - **Symétrie orthogonale.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- (a) Rappeler la définition de la symétrie orthogonale par rapport à  $F$ , que l'on notera  $s_F$ .
- (b) Exprimer  $s_F$  en fonction de  $p_F$ .
- (c) Soit  $a$  un vecteur non nul de  $E$  et  $H$  l'hyperplan ayant pour vecteur normal  $a$ . Exprimer  $s_H$  à l'aide de  $a$ .

## Exercice

On considère l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}_1[X]$  constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1.

Autrement dit,  $\mathbb{R}_1[X] = \{ aX + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$ .

On désigne par  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X], \quad \varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t) Q(t) dt.$$

Par exemple, si  $P = X + 1$  et  $Q = X$ , alors  $\varphi(X + 1, X) = \int_0^1 (t + 1)t dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ .

**I.** Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_1[X]$ .

Pour alléger les notations, on notera désormais  $(P|Q)$  le produit scalaire des polynômes  $P$  et  $Q$  à la place de  $\varphi(P, Q)$ .

La norme associée à ce produit scalaire sera notée  $\|\cdot\|$ .

Ainsi, pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_1[X]$ ,  $\|P\| = \sqrt{(P|P)}$ .

**II.** Dans cette question, on se propose de montrer qu'il existe un unique polynôme  $P_0$  de  $\mathbb{R}_1[X]$  possédant la propriété suivante :  $\forall P \in \mathbb{R}_1[X], (P|P_0) = P(0)$ .

On distinguera bien  $P_0$  qui désigne un polynôme de  $\mathbb{R}_1[X]$  et  $P(0)$  qui représente la valeur du polynôme  $P$  en 0.

**II.A.** Soit  $P_0$  un polynôme fixé de  $\mathbb{R}_1[X]$ .

Montrer que l'égalité  $(P|P_0) = P(0)$  est vérifiée pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_1[X]$ , si et seulement si, elle est vérifiée pour les deux polynômes  $P = 1$  et  $P = X$ .

**II.B.** On pose :  $P_0(X) = a_0X + b_0$  où  $a_0$  et  $b_0$  désignent deux réels.

**II.B.1.** Calculer  $(1|P_0)$  et  $(X|P_0)$  à l'aide de  $a_0$  et  $b_0$ .

En déduire que  $(P|P_0) = P(0)$  pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_1[X]$ ,

$$\text{si et seulement si : } \begin{cases} \frac{1}{2} a_0 + b_0 = 1 \\ \frac{1}{3} a_0 + \frac{1}{2} b_0 = 0 \end{cases}$$

**II.B.2.** Conclure qu'il existe un unique polynôme  $P_0$  de  $\mathbb{R}_1[X]$  que l'on explicitera tel que :  $\forall P \in \mathbb{R}_1[X], (P|P_0) = P(0)$ .

**III.** On désigne par  $S$  l'ensemble des polynômes  $P$  de  $\mathbb{R}_1[X]$  tels que  $\|P\|=1$  et on se propose de déterminer la valeur maximale prise par  $P(0)$  lorsque  $P$  décrit  $S$  en utilisant successivement deux méthodes différentes.

**III.A.** Première méthode.

On pose  $P_1 = 1$ .

**III.A.1.** Vérifier que  $\|P_1\|=1$ .

**III.A.2.** En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, déterminer un polynôme  $P_2$  de  $\mathbb{R}_1[X]$  tel que  $(P_1, P_2)$  soit une base orthonormale de  $\mathbb{R}_1[X]$ .

**III.A.3.** Montrer que les éléments de  $S$  sont exactement les polynômes de la forme  $\cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$ , où  $\theta$  décrit  $\mathbb{R}$ .

**III.A.4.** Si  $P = \cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$ , déterminer deux réels  $\lambda$  et  $\theta_0$  indépendants de  $\theta$  et tels que  $P(0) = \lambda \cos(\theta - \theta_0)$  pour tout réel  $\theta$ .

**III.A.5.** En déduire la valeur maximale prise par  $P(0)$  lorsque  $P$  décrit  $S$ .

**III.B.** Deuxième méthode.

**III.B.1.** Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et préciser les cas où cette inégalité est une égalité.

**III.B.2.** En utilisant le résultat obtenu dans la partie **II.**, montrer que :  $\forall P \in S, P(0) \leq \|P_0\|$ .

**III.B.3.** Déterminer un polynôme  $P$  de  $S$  tel que  $P(0) = \|P_0\|$ .

**III.B.4.** Retrouver ainsi d'une seconde manière la valeur maximale prise par  $P(0)$  lorsque  $P$  décrit  $S$ .