Université Claude Bernard–Lyon I
CAPES de Mathématiques : Oral
Année 2004–2005

Leçon 84 : Calcul approché d'intégrales

Contenu de la leçon

- Il faut envisager les méthodes suivantes :
  - rectangles ;
  - trapèzes et point-milieu ;
  - la méthode de Simpson n'est peut-être pas obligatoire, mais elle sera appréciée.
- Pour chaque méthode, il faut donner :
  - l'idée : remplacer la fonction sur chaque intervalle de la subdivision par telle fonction dont on calcule l'intégrale ; faire un dessin !
  - la formule qui donne l'approximation ;
  - *impérativement*, une majoration de l'erreur ; cependant, ce n'est pas grave si vous donnez une majoration $C(b-a)^5/n^4$ pour la méthode de Simpson, sans la valeur explicite de C.
- Il est impératif de démontrer la majoration de l'erreur commise dans un cas au moins (et au plus, compte tenu de la longueur), et la méthode des rectangles fait un peu "pauvre". Restent donc la méthode des trapèzes et des rectangles, car la preuve pour la méthode de Simpson est un peu trop longue.
- Il faut prendre le temps d'implémenter un algorithme sur machine, et de dire pouquoi ça ne sert à rien : la machine est déjà munie d'un algorithme performant, probablement Simpson...

  Quand on évalue l'erreur sur un exemple numérique pour lequel on connaîtrait la valeur de l'intégrale, il ne faut pas prendre pour référence cette valeur, mais majorer explicitement l'erreur (et donc la dérivée qu'il faut) et dire qu'on obtient une valeur approchée de l'intégrale à l'erreur (calculée) près.

Prérequis

- Intégration :
  - intégrale d'une fonction continue ; linéarité ;
  - lien avec la primitive : $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$;
  - (il faut savoir que d'une façon ou d'une autre, l'existence d'une intégrale et le lien primitive-intégrale reposent sur la continuité uniforme d'une fonction continue sur un compact ; *cf.* rapport du jury) ;
  - $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.
- Formules de Taylor.
- Définition de la convexité.

I Principe général (seuls (a) et (c) sont indispensables)

(a) On donne une fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. On cherche une valeur approchée de l'intégrale de f.

(b) Dans cette leçon, on s'appuie toujours sur une subdivision *régulière* de l'intervalle d'intégration. D'autres méthodes utilisent d'autres subdivisions, dont on ne parlera plus dès la fin de ce (b) :

- subdivision aléatoire pour la méthode dite "Monte-Carlo" ;
- subdivision dont les points s'accumulent aux bords de l'intervalle –voir CAPES 2000.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\forall i \in \{0,\dots,n\}, \quad x_i^{(n)} = a + i\frac{b-a}{n}.$$

On remarque au passage que l'on a :

$$\forall i \in \{0,\dots,n-1\}, \quad x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)} = \frac{b-a}{n}.$$

Lorsque n est fixé sans ambiguïté, on remplacera $x_i^{(n)}$ par x_i.

(d) L'idée de chacune des méthodes consiste à remplacer, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la fonction f par une fonction "simple", affine par morceaux ou polynomiale par morceaux, dont on calcule explicitement l'intégrale.

Pour chaque méthode, on trouve pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ une famille de coefficients $p_i^{(n)}$ $(0 \le i \le n)$ ou $p_j^{(n)}$ $(0 \le j \le 2n)$ (p comme poids), et on prend pour valeur approchée de l'intégrale l'une des sommes

$$\sum_{i=0}^{n} p_i^{(n)} f(x_i^{(n)}) \quad \text{ou} \quad \sum_{j=0}^{2n} p_j^{(n)} f(x_j^{(2n)}).$$

Notons que si on veut que la formule soit exacte au moins si f est constante, il faut imposer :

$$\sum_{i=0}^{n} p_i^{(n)} = 1, \quad \text{ou} \quad \sum_{j=0}^{2n} p_j^{(2n)} = 1.$$

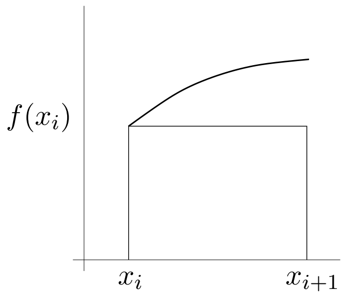
Ainsi, une méthode consiste à choisir un barycentre, une moyenne pondérée, des valeurs prises par f aux points de la subdivision.

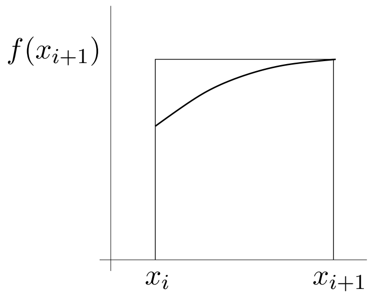
(e) Le problème principal consiste à majorer l'erreur commise. L'idée de chaque méthode, c'est de supposer f "assez dérivable", et de majorer l'erreur en fonction de la borne supérieure d'une dérivée de f et d'une puissance de n.

Pour cela, on commence par travailler sur un intervalle $[x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]$, ou, ce qui revient au même (aux notations près), on commence par travailler avec $n = 1$ sur l'intervalle $[a,b]$, puis on fait la somme des erreurs commises sur chaque intervalle.

II Méthode des rectangles

On remplace f par la valeur qu'elle prend sur un bord, gauche ou droit, de l'intervalle.





Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on remplace l'intégrale de f par l'aire de l'un des rectangles ci-dessus, ce qui donne les formules :

$$R_n^{(g)} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i) = (b-a) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(x_i), \quad R_n^{(d)} = (b-a) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i).$$

Proposition *Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\mu_1 = \sup_{[a,b]} |f'|$, on a :*

$$\left| \int_a^b f - R_n^{(g)} \right| \leq \frac{\mu_1 (b-a)^2}{2\,n}, \qquad \left| \int_a^b f - R_n^{(d)} \right| \leq \frac{\mu_1 (b-a)^2}{2\,n}.$$

Pour faire la preuve, on commence par le cas $n = 1$. Par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x \in [a,b], \quad |f(x) - f(a)| \leq \mu_1 (x - a),$$

puis on intègre :

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a) f(a) \right| = \left| \int_a^b (f(x) - f(a))\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b \mu_1 (x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{\mu_1 (b-a)^2}{2}.$$

Pour n quelconque, on applique l'inégalité précédente à chaque $[x_i, x_{i+1}]$, puis l'inégalité triangulaire : on trouve n termes d'erreur $\mu_1 (b-a)^2 / n^2$, ce qui donne la proposition.

Exemple
Appliquons à la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/(1+x)$. Pour n fixé, on a :

$$R_n^{(g)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i}.$$

L'exemple est classique pour illustrer les sommes de Riemann : cette suite converge vers $\ln 2$. On a $\mu_1 = 1$, donc la proposition donne mieux : $|R_n^{(g)} - \ln 2| \leq 1/(2n)$.

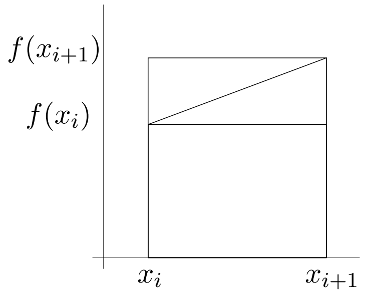
III Méthodes d'ordre 2 : trapèzes, point milieu/tangente

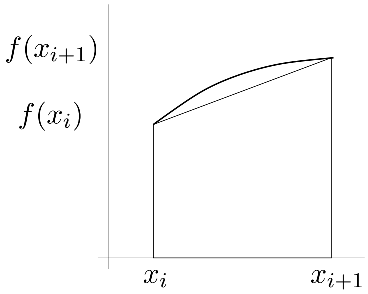
1° Méthode des trapèzes

Idée naïve à partir de la précédente : comme on ne voit pas de raison de privilégier la droite par rapport à la gauche, on se dit qu'on va faire la moyenne des méthodes des rectangles, i.e. approximer f par la moyenne des valeurs qu'elle prend aux deux extrêmités. On pose donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_n = \frac{R_n^{(g)} + R_n^{(d)}}{2}.$$

Interprétation graphique : la moyenne des aires des rectangles est aussi l'aire du trapèze délimité par la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que f en x_i et en x_{i+1}. Ceci justifie moralement que l'approximation soit bien meilleure.





Proposition *Si f est $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et $\mu_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$, on a :*

$$\left| \int_a^b f - T_n \right| \leq \frac{\mu_2 (b-a)^3}{12\,n^2}.$$

Preuve (assez naturelle)
On commence par $n = 1$. On doit majorer :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

Une idée de preuve simple : considérer b comme une variable, et étudier la fonction définie par :

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{f(a)+f(x)}{2}(x-a) \quad (x \in [a,b]).$$

Il importe de remarquer que $g(a) = 0$. La fonction g est dérivable et on a :

$$g'(x) = f(x) - \frac{f'(x)}{2}(x-a) - \frac{f(a)+f(x)}{2} \quad (x \in [a,b]).$$

Il importe de remarquer que $g'(a) = 0$. La fonction g' est dérivable et on a :

$$g''(x) = f'(x) - \frac{f''(x)}{2}(x-a) - \frac{f'(x)}{2} - \frac{f'(x)}{2} = -\frac{f''(x)}{2}(x-a) \quad (x \in [a,b]).$$

On majore f'', et on conclut par intégrations :

$$|g'(x)| = \int_a^x |g''(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x \frac{\mu_2}{2}(t-a)\,\mathrm{d}t = \frac{\mu_2}{4}(x-a)^2,$$

$$|g(x)| = \int_a^x |g'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x \frac{\mu_2}{4}(t-a)^2\,\mathrm{d}t = \frac{\mu_2}{12}(x-a)^3 \quad (x \in [a,b]),$$

et c'est fini pour $n = 1$! Pour passer à n quelconque, on applique l'inégalité précédente à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et on somme.

Autre idée de preuve (cf. Simpson)
Pour $n = 1$, on part de l'expression :

$$\int_a^b (x-a)(b-x)f^{(2)}(x)\,\mathrm{d}x,$$

et on montre par deux intégrations par parties bien pensées que c'est (à une constante multiplicative près) l'erreur $\int_a^b f - T_1$.

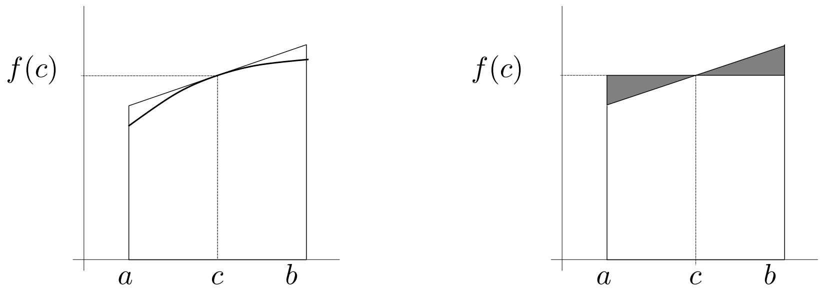
Exemple
On reprend le même : $f(x) = 1/(1+x)$ si $x \in [0,1]$. On trouve facilement : $\mu_2 = 2$, et :

$$T_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n+i}.$$

On peut donc annoncer fièrement : $|T_n - \ln 2| \leq 1/(6n^2)$. En fait, on a : $(T_n - \ln 2) \sim 1/(16n^2)$.

2° Méthode du point médian ou de la tangente
L'idée ici est graphiquement limpide. Si $n = 1$, on remplace la courbe de f par la tangente à la courbe au point médian, dont l'abscisse est $c = (a+b)/2$. L'équation de la tangente est :

$$y = f(c) + (x-c)f'(c).$$



On constate que l'aire du trapèze délimité par la tangente est égale à l'aire du rectangle délimité par la droite d'ordonnée $f(c)$, car les deux triangles grisés sont isométriques. (La formule ci-dessous se/le démontre analytiquement.) On approxime l'intégrale sur $[a, b]$ par :

$$(\S) \qquad (b-a)\,f(c) = \int_a^b (f(c) + (x-c)f'(c))\,\mathrm{d}x.$$

Passant à n quelconque, et appliquant les idées précédentes à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on pose donc :

$$M_n = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = (b-a) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\, f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right).$$

L'intérêt de cette interprétation de la méthode du point médian par la tangente, c'est de donner lieu à une preuve très naturelle.

Proposition *Si f est $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et $\mu_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$, on a :*

$$\left| \int_a^b f - M_n \right| \leq \frac{\mu_2 (b-a)^3}{24\, n^2}.$$

Preuve (naturelle s'il en est !)
On commence par $n = 1$. On note $c = (a+b)/2$ et on exploite (§). On doit majorer :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\ f(c) = \int_a^b \big(f(x) - f(c) - (x-c)f'(c)\big)\ \mathrm{d}x.$$

Miracle : on reconnaît ici le début d'une formule de Taylor ! Plus précisément, on déduit de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - f(c) - (x-c)f'(c)| \leq \frac{\mu_2}{2}(x-c)^2.$$

Il vient alors :

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\ f(c) \right| \leq \frac{\mu_2}{2} \int_a^b (x-c)^2\,\mathrm{d}x = \frac{\mu_2 (b-a)^3}{24}.$$

Le passage à n quelconque est standard.

Exemple
On reprend le même : $f(x) = 1/(1+x)$ si $x \in [0, 1]$. On a vu : $\mu_2 = 2$.

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{2i+1}{2n}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{2(n+i)+1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{2}{2k+1}.$$

On peut donc annoncer : $|T_n - \ln 2| \leq 1/(12n^2)$. En fait, on a : $(T_n - \ln 2) \sim -1/(32n^2)$.

IV Méthode de Simpson

On sait que la méthode de Simpson consiste à remplacer, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la fonction f par un polynôme de degré 2 qui prend les mêmes valeurs que f en x_i, x_{i+1} et $\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$.
Problème : retrouver les coefficients !

1° Première méthode pour retrouver la formule

Idée *Pour une raison un peu mystérieuse, la méthode de Simpson s'obtient à partir de la méthode des trapèzes par la méthode dite d'accélération de la convergence de Romberg.*

Supposons que l'inégalité de la méthode des trapèzes soit un équivalent (on ne sait pas le démontrer, d'ailleurs c'est faux pour certaines fonctions f, mais ce n'est pas grave, car on indique seulement un procédé heuristique) (peut-être que $C = 1/12$, mais on s'en fiche) :

$$T_n \sim \frac{C}{n^2}.$$

Pour faire intervenir $\frac{x_i^{(n)}+x_{i+1}^{(n)}}{2} = x_?^{(2n)}$, on veut faire jouer T_{2n}. Plus précisément, on veut faire une combinaison linéaire de T_n et T_{2n} de la forme $S_n = \alpha\, T_n + \beta\, T_{2n}$ telle que :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \displaystyle\int_a^b f$ (c'est le minimum !) ;
- $S_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (pour pouvoir dire qu'on a accéléré la convergence).

La première condition impose : $\alpha + \beta = 1$. Pour la deuxième, constatons que :

$$T_{2n} \sim \frac{C}{4n^2},$$

et donc :

$$\alpha\, T_n + \beta\, T_{2n} = \alpha\, \frac{C}{n^2} + \beta\, \frac{C}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = C\, \frac{\alpha + \frac{\beta}{4}}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On est amené à prendre $\alpha + \frac{\beta}{4} = 0$. Ainsi, on est conduit à choisir :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 1, \\ \alpha + \frac{\beta}{4} = 0, \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = -\frac{1}{3}, \\ \beta = \frac{4}{3}, \end{array}\right.$$

ce qui donne :

$$S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}.$$

Il se trouve que “c'est” la méthode de Simpson.

Remarque *Vu qu'on a supprimé le terme en $1/n^2$, on s'attend à ce que la méthode donne un terme d'erreur en $1/n^3$. En réalité, on verra que l'erreur est en $1/n^4$.*

2° Deuxième méthode pour trouver la formule

Lemme (quasiment inutile) *Etant donné trois réels distincts a, b, c et trois réels quelconques y_a, y_b, y_c, il existe un unique polynôme P de degré au plus 2 tel que*

$$P(a) = y_a, \quad P(b) = y_b, \quad P(c) = y_c.$$

On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'évaluation $\mathrm{ev}_x : P \mapsto P(x)$ est une forme linéaire sur cet espace. Il en résulte que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & \left(P(a), P\left(\frac{a+b}{2}\right), P(b)\right) \end{array}$$

est linéaire. Or, elle est injective, car un polynôme de degré au plus 2 ayant trois racines distinctes est nécessairement nul. Par égalité des dimensions à la source et au but, il en résulte qu'elle est bijective. Le lemme en résulte.

Proposition (Formule des trois niveaux) *Etant donné deux réels $a < b$ et $c = \frac{a+b}{2}$, il existe un unique triplet $(\alpha, \gamma, \beta) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout polynôme P de degré au plus 2,*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\; P(a) + \gamma\; P\left(\frac{a+b}{2}\right) + \beta\; P(b).$$

De plus, on a : $\alpha = \cdots$, $\beta = \cdots$, $\gamma = \cdots$. (Dur à se rappeler !)

Idée *On comprend la formule de la proposition comme une expression de la forme linéaire*

$$I : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}, \qquad P \mapsto \frac{1}{b-a}\int_a^b P$$

comme combinaison linéaire de $(\mathrm{ev}_a, \mathrm{ev}_c, \mathrm{ev}_b)$.

On reprend les notations du lemme. D'après la preuve du lemme, la famille $(\mathrm{ev}_a, \mathrm{ev}_c, \mathrm{ev}_b)$ est une famille libre, donc c'est une base du dual de $\mathbb{R}_2[X]$. D'où l'existence et l'unicité de (α, γ, β), coefficients de la forme linéaire $P \mapsto \frac{1}{b-a}\int_a^b P$ dans cette base.
Pour calculer α, γ, β, on teste sur la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$\begin{array}{ll} P = 1 & 1 = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \alpha + \gamma + \beta \\[2ex] P = X & \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \alpha\; a + \gamma\;\dfrac{a+b}{2} + \beta\; b \\[2ex] P = X^2 & \dfrac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \alpha\; a^2 + \gamma\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \beta\; b^2. \end{array}$$

On récrit la dernière égalité :

$$\frac{a^2+ab+b^2}{3} = \left(\alpha + \frac{\gamma}{4}\right)\; a^2 + \frac{\gamma}{2}\; ab + \left(\frac{\gamma}{4} + \beta\right)\; b^2.$$

En identifiant cofficient par coefficient (ce qui n'est pas justifié mais fonctionne), on trouve une solution, dont on vérifie qu'elle fonctionne ; c'est la seule d'après le début de la preuve :

$$\gamma = \frac{2}{3}, \qquad \alpha = \beta = \frac{1}{6}.$$

3° Formule pour la méthode de Simpson

Maintenant, on l'applique sur $[x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]$ et on fait la somme sur i : le coefficient associé à $\xi = \frac{x_i^{(n)}+x_{i+1}^{(n)}}{2}$ est $\gamma = \frac{2}{3}$, car ξ n'apparaît que dans un seul intervalle. Le coefficient associé à $x_i^{(n)}$ est $\alpha + \beta = \frac{1}{3}$ si $1 \le i \le n-1$, car $x_i^{(n)}$ apparaît une fois comme extrêmité gauche, et une fois comme extrêmité droite d'un intervalle ; et c'est $\alpha = \beta = \frac{1}{6}$ si $i = 0$ ou $i = n$. En d'autres termes, on pose :

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{6}\; f(x_0^{(n)}) + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i^{(n)}) + \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i^{(n)} + x_{i+1}^{(n)}}{2}\right) + \frac{1}{6}\; f(x_n^{(n)})\right].$$

Remarque *Il se trouve que la formule des trois niveaux est en fait valable pour les polynômes de degré* 3 *également. C'est ce qui explique que l'erreur est en* $1/n^4$ *et non en* $1/n^3$.

4° Majoration de l'erreur

Proposition *Si* f *est* $\mathcal{C}^4$ *sur* $[a,b]$ *et* $\mu_4 = \sup_{[a,b]} |f^{(4)}|$, *on a :*

$$\left| \int_a^b f - S_n \right| \leq \frac{\mu_4 (b-a)^5}{2\,880\; n^4}.$$

(La valeur exacte 2 880 n'est pas indispensable. Il est plus intéressant de savoir expliquer comment retrouver les coefficients à partir d'une idée simple.)

Idée de la preuve
Pour $n = 1$, on part de l'expression :

$$\int_a^b (x-a)^2 (b-x)^2 f^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x,$$

et quatre intégrations par parties montrent que c'est (à peu près) l'erreur $\int_a^b f - S_1$.

V Résumé des différentes méthodes

On interprète la méthode X comme le barycentre des $f(x_i^{(n)})$ ou des $f(x_j^{(2n)})$,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \rightsquigarrow X_n = \sum_{i=0}^{n} p_i^{(n)}\, f(x_i^{(n)}) \quad \text{ou} \quad X_n = \sum_{j=0}^{2n} p_j^{(2n)}\, f(x_j^{(2n)}),$$

avec les poids $(p_i^{(n)})_{0 \leq i \leq n}$ donnés par le tableau suivant :

sub-	$x_0^{(2n)}$	$x_1^{(2n)}$	$x_2^{(2n)}$	$x_3^{(2n)}$	$\cdots$	$x_{2n-3}^{(2n)}$	$x_{2n-2}^{(2n)}$	$x_{2n-1}^{(2n)}$	$x_{2n}^{(2n)}$
divisions	$x_0^{(n)}$		$x_1^{(n)}$		$\cdots$		$x_{n-1}^{(n)}$		$x_n^{(n)}$
$R_n^{(g)}$	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$		$\cdots$		$\frac{1}{n}$		0
$R_n^{(d)}$	0		$\frac{1}{n}$		$\cdots$		$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$
T_n	$\frac{1}{2n}$		$\frac{1}{n}$		$\cdots$		$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{2n}$
T_{2n}	$\frac{1}{4n}$	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{2n}$		$\cdots$		$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{4n}$
M_n		$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$	
S_n	$\frac{1}{6n}$	$\frac{2}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	$\frac{2}{3n}$	$\cdots$	$\frac{2}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	$\frac{2}{3n}$	$\frac{1}{6n}$

On voit facilement les formules :

$$T_n = \frac{R_n^{(g)} + R_n^{(d)}}{2}, \quad S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{3} = \frac{T_n + 2M_n}{3}.$$