# Limites et développements limités

Dans toute cette fiche $\phi$ désignera une fonction définie sur un intervalle $I$ non vide de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

## 1 Limites

**Définition 1** 
- *La fonction $f$ admet une limite finie en un point $a$ de $I$ (ou de $\overline{I}$),s'il existe un réel $\ell$ tel que, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ vérifiant pour tout $x \in I \cap ]a-\delta, a+\delta[$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On note alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et on dit que $f$ converge vers $\ell$ en $a$.*
- *Dans le cas où $f$ n'admet pas de limite finie, on dit que $f$ diverge en $a$.*
- *La fonction $f$ tend vers $+\infty$ en un point $a$ de $\overline{I}$ si, pour tout réel $A$, il existe un réel $\delta > 0$ vérifiant pour tout $x \in I \cap ]a-\delta, a+\delta[$, $f(x) > A$. On note alors $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et on dit que $f$ diverge vers $+\infty$ en $a$.*

*Remarque :* On peut définir également la limite à droite ou la limite à gauche en un point.

Si la fonction $f$ est définie au voisinage de $+\infty$, c'est-a-dire si $I$ est de la forme $[\alpha, +\infty[$, on peut définir la limite de $f$ en $+\infty$ :

**Définition 2** 
- *La fonction $f$ admet une limite finie en $+\infty$ s'il existe un réel $\ell$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $\beta$ tel que, pour tout $x > \beta$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On écrit alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et on dit que $f$ converge vers $\ell$ en $+\infty$.*
- *Dans le cas où $f$ n'admet pas de limite finie en $+\infty$, on dit que $f$ diverge en $+\infty$.*
- *La fonction $f$ tend vers $+\infty$ en un point $+\infty$ si, pour tout réel $A$, il existe un réel $\beta$ vérifiant pour tout $x > \beta$, $f(x) > A$. On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et on dit que $f$ diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.*

*N.B. :* On évitera d'écrire le symbole lim tant que l'on n'a pas démontré l'existence de la limite !

**Exercice 1.** Donner des exemples de fonctions qui admettent une limite finie en un point, une limite infinie en un point, qui divergent (sans admettre de limite) en un point. Même question pour des limites en $+\infty$.

**Proposition 3** 
1. *Si une limite existe, elle est unique. Autrement dit, si $f$ tend à la fois vers $\ell$ et $\tilde{\ell}$, avec éventuellement $\ell$ ou $\tilde{\ell} = \pm\infty$, alors $\ell = \tilde{\ell}$.*
2. *Règles de calcul sur les limites : Soient $f$ et $g$ deux fonction définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.*
   - *Produit par une constante. Si $\lim_a f = \ell$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_a \lambda f = \lambda\ell$. Si $\lim_a f = +\infty$ et si $\lambda > 0$, $\lim_a \lambda f = +\infty$.*
   - *Limite d'une somme*

| | $\lim_a g = \ell'$ | $\lim_a g = +\infty$ | $\lim_a g = -\infty$ | *g minorée* | *g majorée* |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_a f = \ell$ | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | *FI* | *FI* |
| $\lim_a f = +\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | *FI* | $+\infty$ | *FI* |
| $\lim_a f = -\infty$ | $-\infty$ | *FI* | $-\infty$ | *FI* | $-\infty$ |

   - *Limite d'un produit*

| | $\lim_a g = \ell'$ | $\lim_a g = +\infty$ | $\lim_a g = -\infty$ | *g bornée* |
|---|---|---|---|---|
| $\lim_a f = \ell > 0$ | $\ell \times \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | *FI* |
| $\lim_a f = 0$ | 0 | *FI* | *FI* | 0 |
| $\lim_a f = +\infty$ | $\mathrm{sgn}\ell'\ \infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | *FI* |

- *Si $f$ admet pour limite $\ell \in \overline{R}\backslash\{0\}$ en $a$, alors $f$ ne s'annule pas dans un voisinage de $a$ et $1/f$ tend vers $1/\ell$ en $a$. Si $f$ tend vers 0 en $a$ et est strictement positive dans un voisinage de $a$, alors $1/f$ tend vers $+\infty$.*
- *Si $g : I \to J$ admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{I}$ et si $f$ est définie sur $J$ et admet pour limite $\ell' \in \overline{R}$ en $\ell$, alors la fonction $f \circ g$ admet pour limite $\ell'$ en $a$.*

**Exercice 2.** Démontrer les propriétés ci-dessus.

# 2 Continuité, dérivabilité

## 2.1 Continuité

**Définition 4** *La fonction $f$ est dite continue en $a \in I$ si $f$ admet une limite finie en $a$ et on a dans ce cas $f(a) = \lim_a f$.*

*La fonction $f$ est dite continue sur $I$ si elle est continue en tout point de $I$.*

**Exercice 3.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $f$ est continue sur $I$ et si $(u_n)$ est une suite de $I$, convergente et de limite $\ell \in I$, alors $(f(u_n))$ est convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer également que, si pour toute suite $(u_n)$ de points de $I$, convergeant vers un point de $I$, la suite $(f(u_n))$ converge et admet pour limite $f(\lim u_n)$, alors $f$ est continue sur $I$.

**Théorème 5 (Théorème de Weierstrass)** *Toute fonction continue sur un intervalle compact est bornée et atteint ses bornes.*

**Exercice 4.** Lemme des pics et théorème de Weierstrass.

1. Soit $(u_n)$ une suite à valeurs réelles. On dit que $n$ est « éclairé » si pour tout $p > n$, $u_n > u_p$, et qu'il est dans l'ombre sinon.
   (a) On suppose pour cette question qu'il existe une infinité d'indices éclairés notés $(n_k)_k \geq 0$. Montrer que les $(u_{n_k})_k$ constituent une sous-suite décroissante de $(u_n)$.
   (b) On suppose pour cette question que l'ensemble des indices éclairés est fini. Construire une sous-suite de $(u_n)$ croissante.
   (c) En déduire que si $(u_n)$ est à valeurs dans un intervalle compact, elle admet une sous-suite convergente.
2. Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On note $M = \sup_{[a,b]} f$.
   (a) Justifier l'existence d'une suite $(u_n)$ de $[a, b]$ telle que $(f(u_n))$ tend vers $M$.
   (b) En déduire l'existence d'une suite $(v_n)$ de $[a, b]$ convergente, et telle que $(f(v_n))$ tend vers $M$.
   (c) Conclure qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = M$.

**Exercice 5.** Montrer que si une fonction est continue sur $[0, +\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$, alors elle est bornée.

## 2.2 Dérivabilité

**Définition 6** *Soient $a$ un point de $I$ et $h$ un réel non nul tel que $a + h$ appartienne à $I$. On appelle taux d'accroissement de $f$ entre $a$ et $a + h$ le réel $\tau_a(h) = (f(a + h) - f(a))/h$.*

*Lorsque les limites de $\tau_a$ à droite et à gauche en 0 existent et sont égales, on appelle cette limite commune nombre dérivé de $f$ en $a$ et on le note $f'(a)$. On dit alors que $f$ est dérivable en $a$.*

*La fonction $f$ sera dite dérivable sur l'intervalle $I$ si elle est dérivable en tout point de $I$. La fonction $a \mapsto f'(a)$ est la fonction dérivée de $f$.*

**Exercice 6.**

1. Soit $k$ un réel et $n$ un entier. Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité, ainsi que les fonctions dérivées, des fonctions $x \mapsto k$, $x \mapsto x^n$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sqrt{|x|}$.

2. Dérivée de la fonction sin. On se place dans un repère orthonormé, avec $O$ le centre du repère et $I$ le point $(1,0)$. Soit $x \in ]0, \pi/2[$ et $A$ le point de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$. On note $H$ le pied de la hauteur issue de $A$ du triangle $(OAI)$ et $K$ le point d'intersection de la tangente en $A$ au cercle trigonométrique et de l'axe des abscisses.

   (a) Déterminer les coordonnées des points $H$ et $K$.
   (b) Montrer que $\sin x \leq x$.
   (c) Montrer que l'aire du triangle $(OAK)$ est égale à $(\tan x)/2$.
   (d) En déduire que la fonction sin est dérivable en $0^+$ et de dérivée 1. Et en $0^-$ ?
   (e) En utilisant une formule trigonométrique, montrer maintenant que $(\cos h - 1)/h$ tend vers 0. Que vaut la dérivée de la fonction cos en 0 ?
   (f) Conclure que $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

**Proposition 7** *Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue.* **La réciproque est fausse**.

**Exercice 7.** Montrer la proposition ci-dessus !

**Proposition 8** *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions définies sur $I$ et dérivables en $a$, on a :*

1. *La fonction $(f+g)$ est dérivable en $a$, de nombre dérivé $f'(a) + g'(a)$.*

2. *La fonction $f \times g$ est dérivable en $a$, de nombre dérivé $f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$.*

3. *Si $g(a)$ est non nul, alors $g$ ne s'annule pas dans un voisinage de $a$, $1/g$ est dérivable en $a$, de nombre dérivé $-g'(a)/g^2(a)$, et $f/g$ est dérivable en $a$, de nombre dérivé $(f'(a)g(a) - f(a)g'(a))/g^2(a)$.*

4. *Si $g$ est définie sur $I$ et dérivable en $a \in I$ et si $f$ est définie sur $g(I)$ et dérivable en $g(a)$ alors $g \circ f$ est définie sur $J$, dérivable en $a$ et de nombre dérivé $f'(g(a))g'(a)$.*

**Exercice 8.** Montrer ces différentes propriétés. Montrer par récurrence une formule donnant la dérivée $n-$ème du produit de deux fonctions.

# 3 Développement limité

## 3.1 Domination, prépondérance, équivalence

**Définition 9** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$.*

- *On dit que $f$ est négligeable devant $g$, et on note $f = o(g)$ s'il existe un voisinage $U$ de $a$ et une fonction $\epsilon$ définie sur $U$ telle que, pour tout $x$ de $U$, $f(x) = \epsilon(x)g(x)$, la fonction $\epsilon$ vérifiant* $\lim_a \epsilon = 0$.

- *On dit que $f$ est dominée par $g$ au voisinage de $a \in I$, et on note $f = O_a(g)$ s'il existe un réel $\lambda$ et un voisinage $U$ de $a$ tels que, pour tout $x$ dans $U$, $|f(x)| \leq \lambda |g(x)|$.*

- *On dit que $f$ est équivalente à $g$ en $a \in I$, et on note $f \sim_a g$ s'il existe un voisinage $U$ de $a$ et une fonction $\epsilon$ tels que, pour tout $x$ dans $U$, $f(x) = (1 + \epsilon(x))g(x)$, la fonction $\epsilon$ vérifiant* $\lim_a \epsilon = 0$.

**Exercice 9.**

1. Montrer que si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.

2. Exhiber des fonctions telles que $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ mais $f_1 + f_2$ n'est pas équivalente à $g_1 + g_2$.

3. Étudier les croissances comparées des fonctions $x \mapsto x^n$, $x \mapsto a^x$, $x \mapsto \ln x$, en $+\infty$ et en 0.

### 3.2 Développement limité

**Définition 10** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, $a$ un point de $I$, et $n$ un entier naturel. On dit que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $a$ s'il existe des réels $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ tels que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n)$.*

*Lorsqu'une fonction $f$ est définie sur un intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$, on dit que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $+\infty$ s'il existe des réels $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ tels que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^{-k} + o_{+\infty}(x^{-n})$.*

**Proposition 11**

- *Le développement limité à un ordre donné, s'il existe, est unique.*
- *La fonction $f$ est continue (resp. dérivable) en $a$ si et seulement si elle admet un développement limité en $a$ à l'ordre 0 (resp. 1).*
- *Le développement limité d'une fonction paire (resp. impaire) en 0, s'il existe, ne possède que des termes d'ordre pair (resp. impair).*
- *Formule de Taylor-Young : Si la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$, alors elle admet un développement limité en tout point $a$ de $I$ et on a*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a))^n$$

- *On peut faire des sommes, produits ou quotients de développements limités. On peut les intégrer, les dériver, les composer.*

**Exercice 10.**

1. Montrer que la fonction $x \mapsto t^3 \sin(1/t)$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.
2. Donner les développements limités en 0 à l'ordre 6 des fonctions usuelles ($x \mapsto 1/(1+x)$, exp, ln, sin, cos, $x \mapsto \sqrt{1+x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$...)
3. Donner les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \exp(x)\cos(x) \qquad x \mapsto (\ln(1-x))^2 \qquad x \mapsto \frac{\mathrm{sh}x - x}{x^3} \qquad x \mapsto \ln(\cos(x))$$

4. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \qquad \lim_{0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$$