DOCUMENT 31

L'inégalité des accroissements finis. Applications.

1. Introduction

La fonction $x \in]0,1[\to \sin \dfrac{1}{x}$ est bornée mais il n'en est pas de même de sa fonction dérivée $x \to -\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$. Dans ce document nous allons voir qu'en revanche si une fonction a une dérivée bornée sur un intervalle bornée alors cette fonction est elle-même bornée. Plus précisément, nous allons démontrer différentes formes de l'inégalité des accroissements finis et en donner des applications aux fonctions et aux suites.

2. L'inégalité des accroissements finis

Sauf mention du contraire, on suppose $\boxed{a < b}$ dans tout ce paragraphe.

THÉORÈME 31.1. *Soit f une application continue sur un segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a,b[$ alors*

$$\boxed{f(b) - f(a) \leq M(b-a)}$$

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Considérons la fonction h définie sur $[a,b]$ par

$$h(x) = f(x) - f(a) - M(x-a) - \epsilon(x-a).$$

Si l'on montre que $h(b) \leq \epsilon$ alors la proposition est démontrée. En effet

$$h(b) \leq \epsilon \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a) - M(b-a)}{b-a+1} \leq \epsilon$$

d'où, l'inégalité étant vraie pour tout $\epsilon > 0$, $\dfrac{f(b)-f(a)-M(b-a)}{b-a+1} \leq 0$. Or $b-a+1 > 0$ et donc $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$. Montrons donc que $h(b) \leq \epsilon$.

Soit $A = \{x \in [a,b] | h(x) \leq \epsilon\}$. Comme $h(a) = 0$, $a \in A$ et, la fonction h étant continue en a, il existe $d \in]a,b]$ tel que $h(d) \leq \epsilon/2$. Donc $A \neq \{a\}$. Soit $c = \sup A \in]a,b]$. Il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers c. Pour tout n, $h(x_n) \leq \epsilon$ et donc, la fonction h étant continue en c, $h(c) \leq \epsilon$ d'où $c \in A$.

Supposons que $c < b$. Il existe $t \in]c,b]$ tel que $\dfrac{f(t)-f(c)}{t-c} \leq f'(c) + \epsilon$ car $\displaystyle\lim_{x \to c, x > c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$. On a

$$f(t) - f(c) \leq (t-c)f'(c) + (t-c)\epsilon \leq M(t-c) + (t-c)\epsilon.$$

Comme $c \in A$,

$$f(c) - f(a) \leq M(c-a) + \epsilon(c-a) + \epsilon$$

d'où, par addition,

$$f(t) - f(a) \leq M(t-a) + \epsilon(t-a) + \epsilon$$

ce qui signifie $t \in A$. C'est absurde et donc $c = b$ et $h(b) \leq \epsilon$.

Remarques.

1) L'examen de la preuve précédente montre qu'il suffit de supposer l'existence pour f d'une dérivée à droite sur $]a, b[$ vérifiant $f'_d(x) \leq M$. Il y a évidemment une version "dérivée à gauche" du théorème.

2) Lorsque f' est intégrable sur $[a, b]$ [1] alors l'inégalité des accroissements finis a une preuve très simple : de $f'(x) \leq M$ on déduit $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(x)dx \leq M(b - a)$. Cette hypothèse est en particulier satisfaite si f' est continue.

Etant donné l'importance de l'inégalité des accroissements finis, nous allons en donner plusieurs formes qui se déduisent presque immédiatement du théorème 31.1

Corollaire 31.1. *Soit f une application continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq f'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$ alors*

$$\boxed{m(b - a) \leq f(b) - f(a)}$$

Il suffit d'appliquer le théorème 31.1 à $-f$.

Corollaire 31.2. *Soit f une application continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe m et M tels que $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$ alors*

$$\boxed{m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)}$$

Donnons un interprétation géométrique de ce corollaire. Dans un plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé, on considère pour $x_0 \in [a, b]$ les droites D_1 et D_2 d'équations respectives

$$y = f(x_0) + m(x - x_0), \qquad y = f(x_0) + M(x - x_0).$$

Soit $x \in [a, b]$. Si $x > x_0$ alors $m(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq M(x - x_0)$ et si $x < x_0$, $M(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq m(x - x_0)$. Cela signifie que le graphe de f est contenu dans l'un des deux cônes limités par D_1 et D_2.

En prenant $x_0 = a$ puis $x_0 = b$, on voit aussi que pour $x \in [a, b]$ le graphe de f est à l'intérieur du parallélogramme limité par les droites $y = m(x - a) + f(a)$, $y = m(x - b) + f(b)$, $y = M(x - a) + f(a)$ et $y = M(x - b) + f(b)$.

Corollaire 31.3. *Soit f et g deux applications continues sur un segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telles que pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) \leq g'(x)$. On a*

$$\boxed{f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)}$$

On applique le théorème 31.1 à la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$ avec $M = 0$ car $h'(x) \leq 0$. On a donc $h(b) - h(a) \leq 0$.

[1] Il existe des fonctions f dérivables sur $[a, b]$ avec une fonction dérivée bornée mais non intégrable au sens de Riemann. Un exemple classique est celui des fonctions de Volterra que l'on peut trouver en exercice dans l'ouvrage de Chambadal et Ovaert, Cours de Mathématiques Spéciales.

COROLLAIRE 31.4. *Soit f et g deux applications continues sur un segment $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ et telles que pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq g'(x)$. On a*

$$\boxed{|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)}$$

En particulier, s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $|f'(x)] \leq m$ pour tout $x \in]a, b[$ alors

$$\boxed{|f(b) - f(a)| \leq m|b - a|}$$

(Ici l'hypothèse $a < b$ n'est pas nécessaire.)

Preuve. On a $f'(x) \leq g'(x)$ et $-f'(x) \leq g'(x)$ d'où, par application du corollaire précédent, $f(b)-f(a) \leq g(b)-g(a)$ et $-f(b)+f(a) \leq g(b)-g(a)$ ce qui se traduit encore par $|f(b)-f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

Si $|f'(x)] \leq m$ alors si $b > a$ on a $|f(b) - f(a)| \leq m(b - a)$ avec $g(x) = mx$. Maintenant si $b < a$ alors $|f(a) - f(b)| \leq m(a - b)$ et donc dans les deux cas $|f(b) - f(a)| \leq m|b - a)|$.

Remarques. 1). Sous cette forme, l'inégalité des accroissements finis est semblable à son énoncé dans le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Rappelons cet énoncé :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ des applications continues sur $[a, b]$ et dérivables (resp. dérivables à droite) sur $]a, b[$ telles, que pour tout $x \in]a, b[$, $||f'(x)|| \leq g'(x)$ (resp. $||f'_d(x)|| \leq g'_d(x)$). Alors on a :

$$\boxed{||f(b) - f(a)|| \leq g(b) - g(a)}$$

Pour la preuve on remplace dans celle du théorème 31.1 la fonction h par la fonction k donnée par

$$k(x) = ||f(x) - f(a)|| - g(x) + g(a) - \epsilon(x - a).$$

2). Il existe une méthode plus classique pour démontrer l'inégalité des accroissements finis. On démontre d'abord le théorème de Rolle puis l'égalité des accroissements finis en appliquant ce théorème à la fonction $\phi(x) = f(x) - [\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)]$. On en déduit facilement l'inégalité des accroissements finis. La méthode utilisée ici à l'avantage d'être facilement généralisable aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ alors que l'on ne dispose plus du théorème de Rolle et de l'égalité des acroissements finis si $n > 1$. Un autre avantage de la preuve est qu'elle n'utilise que des propriétés très élémentaires des limites et que l'on peut la généraliser aux fonctions seulement dérivables à droite. Dans ce cas on ne dispose pas d'un théorème de Rolle à droite (penser à $x \in [-1, 1] \to |x|$).

3). Dans l'enseignement secondaire, on admet en classe de première que toute fonction ayant une dérivée positive sur un intervalle est croissante sur cet intervalle et l'inégalité des accroissements finis est une conséquence presque immédiate de ce résultat. Comme on verra que cette hypothèse est en fait une conséquence de l'inégalité des accroissements finis, il aurait été très contestable de l'utiliser ici. Donnons cependant la preuve de l'inégalité des accroissements finis en supposant que toute fonction avec une dérivée positive est croissante et en conservant les notations et les hypothèses du théorème 31.1.

Soit $\phi(x) = M(x - a) + f(x) - f(a)$. La fonction ϕ est dérivable sur $]a, b[$ et $\phi'(x) = M - f'(x) \geq 0$. La fonction ϕ est donc croissante sur $[a, b]$ d'où $\phi(a) \leq \phi(b)$ et finalement $f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

Exemple. Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = e^{-x}(1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}).$$

Cette fonction est dérivable sur $[0,1]$, $f_n'(x) = -e^{-x}\frac{x^n}{n!}$ et donc $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n!}$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[0,1]$ (version corollaire 31.4) on obtient $|f_n(1) - f_n(0)| \leq \frac{1}{n!}$, c'est-à-dire $|\frac{u_n}{e} - 1| \leq \frac{1}{n!}$. On a donc $\lim_{n\to\infty} u_n = e$.

3. Applications aux fonctions

3.1. Application au sens de variation.

PROPOSITION 31.1. *Soit f une application continue sur un segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*

(1) *La fonction f est constante sur $[a,b]$ si et seulement si, pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) = 0$.*
(2) *La fonction f est croissante sur $[a,b]$ si et seulement si, pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) \geq 0$.*
(3) *La fonction f est décroissante sur $[a,b]$ si et seulement si, pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) \leq 0$.*

Preuve. 1) Si pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) = 0$ alors on peut appliquer le corollaire 31.4 à f sur $[a,x]$ et $[x,b]$ avec $m = 0$ d'où $|f(a) - f(x)| = |f(b) - f(x)| = 0$ et f est constante sur $[a,b]$. Réciproquement, si f est constante sur $[a,b]$ alors sa fonction dérivée est nulle sur cet intervalle.

2) Supposons la dérivée de f positive et soit $x,\ y \in [a,b]$ tels que $x < y$. En appliquant le corollaire 31.1 sur $[x,y]$ avec $m = 0$ on obtient $0 \leq f(y) - f(x)$ et f est croissante. Si maintenant f est croissante sur $[a,b]$ alors, pour tout $x_0 \in]a,b[$ et tout $x \in [a,b]$ avec $x_0 \neq x$, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ d'où $f'(x_0) \geq 0$. La preuve de 3) est analogue.

Remarque. Les résultats précédents peuvent être faux si la fonction f n'est pas définie sur un intervalle. Par exemple, $x \in \mathbb{R}^* \to \frac{1}{x}$ possède une dérivée négative et n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. De même, la restriction de la fonction partie entière à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ a une dérivée nulle et n'est pas constante.

PROPOSITION 31.2. *Soit f une application continue sur un segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. La fonction f est strictement monotone sur $[a,b]$ si et seulement si f est monotone sur $[a,b]$ et si $K = \{x \in]a,b[| f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle non réduit à un point .*

Preuve Supposons f strictement monotone. S'il existe $[x,y] \subset K$ avec $x \neq y$ alors f est constante sur $[x,y]$ ce qui est contradictoire avec la stricte monotonie.

Réciproquement si f est monotone sur $[a,b]$ et si $K = \{x \in]a,b[| f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle non réduit à un point alors supposons que pour $x, y \in [a,b]$ avec $x < y$, on ait $f(x) = f(y)$. La fonction f est monotone donc si $z \in [x,y]$ alors $f(z)$ est compris entre $f(x)$ et $f(y)$ d'où $f(z) = f(x)$. La fonction f est constante sur $[x,y]$. Sa fonction dérivée est nulle sur $]x,y[$ ce qui contredit l'hypothèse faite sur K. On a donc $f(x) \neq f(y)$ et f est strictement monotone.

3.2. Caractérisation des fonctions lipschitziennes. Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Une fonction f est dite k-lipschitzienne sur un intervalle $I \subset D_f$ si , pout tout $(x, y) \in I^2$ avec $x \neq y$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

PROPOSITION 31.3. *Soit f une application dérivable sur l'intérieur d'un intervalle I. La fonction f est k-lipschitzienne sur I si et seulement si, pour tout x à l'intérieur de I, $|f'(x)| \leq k$.*

Preuve. Supposons f k-lipschitzienne sur I. Soit x_0 un point de l'intérieur de I et $x \in I$, $x \neq x_0$. On a $|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}| \leq k$ d'où $|f'(x_0)| = |\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}| \leq k$.

La réciproque est immédiate en utilisant le corollaire 31.4

3.3. Applications à des prolongements de fonctions. Dans le document 26 "Nombre dérivé. Fonctions dérivées " on démontre le résultat suivant en utilisant l'égalité des accroissements finis :

PROPOSITION 31.4. *Soit f une application continue sur $[a, b]$ et $x_0 \in]a, b[$. Si f est dérivable sur $]a, x_0[\cup]x_0, b[$ et si $\lim\limits_{x \to x_0, x \neq x_0} f'(x)$ existe et vaut l alors f est dérivable en x_0, $f'(x_0) = l$ et f' est continue en x_0.*

Ce résultat est aussi une conséquence de l'inégalité des accroissements finis.

En effet, soit $\epsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in]a, b[$ et $0 < |x - x_0| < \eta$ alors $|f'(x) - l| < \epsilon$. Considérons $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - lx$. Si $x \in]a, b[$ et $0 < |x - x_0| < \eta$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis (corollaire 31.4) à g sur l'intervalle de bornes x et x_0 on obtient :

$$|g(x) - g(x_0)| = |f(x) - f(x_0) - l(x - x_0)| \leq \epsilon|(x - x_0)|$$

car $g'(x) = f'(x) - l$. Donc :

$$|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l| < \epsilon.$$

La fonction f est donc dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$. Comme $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0, x \neq x_0} f'(x)$ la fonction f' est continue en x_0.

On obtient une proposition analogue lorsque x_0 est une borne de $]a, b[$.

Un résultat semblable concerne le prolongement par continuité.

PROPOSITION 31.5. *Soit f une fonction définie sur $]a, b[$.*

1. *S'il existe $\eta > 0$ tel que f soit dérivable sur $V =]b - \eta, b[$ et si la dérivée de f est bornée sur V alors f est prolongeable par continuité en b.*
2. *S'il existe $\eta > 0$ tel que f soit dérivable sur $V =]b - \eta, b[$ et si $\lim\limits_{x \to b} f'(x)$ existe alors f est prolongeable par continuité en b et ce prolongement possède sur $]b - \eta, b]$ une fonction dérivée continue en b.*

Preuve. 1) Soit M est un majorant de $|f'(x)|$ sur V. La fonction f est M-lipschitzienne sur V.

Soit (x_n) une suite de V qui converge vers b et soit $\epsilon > 0$. La suite (x_n) est de Cauchy : il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$ implique $|x_n - x_p| \leq \dfrac{\epsilon}{M}$ d'où $|f(x_n) - f(x_p)| \leq M\dfrac{\epsilon}{M} = \epsilon$. La suite $(f(x_n))$ est donc de Cauchy. Soit l sa limite et $\widehat{f}$ le prolongement de f à $]a, b]$ définie par $\widehat{f}(b) = l$.

Considérons (y_n) une suite de $]b-\eta, b[$ qui converge vers b et $\epsilon > 0$. On a $\lim_{n\to\infty} x_n - y_n = 0$ et donc il existe n_0 tel que $n > n_0$ implique $|y_n - x_n| < \dfrac{\epsilon}{2M}$ et $|f(x_n) - l| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Pour $n > n_0$:

$$|f(y_n) - l| \leq |f(y_n) - f(x_n| + |f(x_n) - l| < M|y_n - x_n| + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

La fonction $\widehat{f}$ est donc continue en b.

2) Si f' a une limite en b alors f' est bornée sur un ensemble de la forme $]b-\eta, b[$, $\eta > 0$. Par 1), f est prolongeable par continuité en b et ce prolongement $\widehat{f}$ est continu sur $]b-\eta, b]$. La proposition 31.4, appliquée à la fonction $\widehat{f}$ sur l'intervalle $[b-\eta/2, b]$, montre que $\widehat{f}$ est dérivable en b avec $\widehat{f}'(b) = \lim_{x\to b} f'(x)$ et la dérivée de $\widehat{f}$ est continue en b.

Remarques.
1) L'affirmation 1) n'est qu'une condition suffisante : $x \in \mathbb{R}^{*+} \to x \ln x$ est prolongeable par continuité en 0 mais sa dérivée $x \to 1 + \ln x$ n'est pas bornée sur $]0, \eta[$, $\eta > 0$.
2) La proposition montre que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ alors f est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ si et seulement si f' est bornée sur $]a, b[$.

Exemple. Soit f la fonction continue de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$. Considérons $g : [0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)dt$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$ avec, si $x \neq 0$, $g'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$ et $g'(0) = 0$ (On obtient cette valeur par $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-1}{\ln x}$ et la proposition 31.4). On a $\lim_{x\to 1, x<1} g'(x) = 1$ et donc g admet un prolongement à $[0, 1]$ de classe $\mathcal{C}^1$. Que vaut $\widehat{g}(1)$?

3.4. Des inégalités et des encadrements. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si l'on sait majorer, minorer ou encadrer f' alors, en utilisant le théorème 31.1 ou l'un de ses corollaires, on obtient une inégalité verifiée par f. Par exemple, le corollaire 31.4 appliqué à la fonction sinus conduit à $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y]$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Pour la démonstration de certaines inégalités, le lemme suivant est particulièrement efficace.

LEMME 31.1. *Soit I un intervalle contenant 0 et f une fonction définie sur I. On suppose qu'il existe $M > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $x \in I$,*

$$|(f(x)| \leq M|x|^p.$$

Si f possède sur I une primitive F alors

$$|F(x) - F(0)| \leq M|x|^{p+1} \quad \text{et} \quad F(x) = F(0) + o(x^p)$$

au voisinage de 0.

La preuve est immédiate : pour tout $x \in I$ et tout y compris entre 0 et x on a $|f(y)| \leq M|x|^p$ et l'inégalité des accroissements finis appliquée à F donne

$$|F(x) - F(0)| \leq M|x|^{p+1}.$$

Cette relation entraine qu'au voisinage de 0 on a $F(x)-F(0) \in O(x^{p+1})$ et on sait que $O(x^{p+1}) \subset o(x^p)$ d'où la dernière affirmation.

Exemples.

1) Soit $f(x) = \sin x$ et $I = \mathbb{R}$. On a $|f(x)| \leq 1$ d'où par des applications successives du lemme :

$|-\cos x + 1| \leq |x|$

$|-\sin x + x| \leq |x|^2 \qquad (f(x) = -\cos x,\ F(x) = -\sin x)$

$|\cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1| \leq |x|^3 \qquad (f(x) = -\sin x + x,\ F(x) = \cos x + \dfrac{x^2}{2})$

$|\sin x + \dfrac{x^3}{6} - x| \leq |x|^4$

$|-\cos x + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^2}{2} + 1| \leq |x|^5$

$|-\sin x + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^3}{6} + x| \leq |x|^6$

On en déduit un développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0 pour la fonction sinus :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

2) Pour $x \neq -1$ on a $1-x+x^2 = \dfrac{1+x^3}{1+x} = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{x^3}{1+x}$ d'où $|\dfrac{1}{1+x} - (1-x+x^2)| = \dfrac{|x|^3}{|\,1+x\,|}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} = 1$, il existe un intervalle $I \subset]-1,1[$ contenant 0 et tel que, pour tout $x \in I$, $|\dfrac{1}{1+x}| \leq \dfrac{3}{2}$. Considérons la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x} - (1 - x + x^2)$. Pour tout $x \in I$,

$$|\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2)| \leq \frac{3}{2}|x|^3$$

d'où pour tout $x \in I$,

$$|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}| \leq \frac{3}{2}|x|^4.$$

$(F(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}.)$

On en déduit qu'au voisinage de 0, $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

La généralisation à des puissances plus élevées de x est facile.

Remarque. On peut aussi obtenir les inégalités précédentes par une majoration du reste de la formule de Taylor-Lagrange.

4. Applications aux suites

L'application aux suites de l'inégalité des accroissements finis se fait en général par l'intermédiaire de la proposition 31.3 à l'aide du lemme suivant.

Lemme 31.2. *Soit f une application de $[a,b]$ dans $[a,b]$ k-lipschiptzienne avec $k < 1$. La suite définie par*

$$x_0 \in [a,b], \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers l'unique solution α dans $[a,b]$ de l'équation $f(x) = x$ et l'on a

$$|x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha| \ \textit{et}\ |x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|.$$

Preuve. Comme toute fonction lipschitzienne, f est continue sur $[a, b]$. Soit F la fonction définie sur $[a, b]$ par $F(x) = x - f(x)$. On a $F(a) \leq 0$ et $F(b) \geq 0$ et donc le théorème des valeurs intermédiaires entraine qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $F(\alpha) = 0$ d'où $f(\alpha) = \alpha$. Si β possède la même propriété et si $\alpha \neq \beta$ alors $|\alpha - \beta| = |f(\alpha) - f(\beta)| < k|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$ ce qui est absurde et donc α est unique. On a :

$$|x_n - \alpha| = |f(x_{n-1}) - f(\alpha)| < k|x_{n-1} - \alpha|$$

et, par une récurrence immédiate, $|x_n - \alpha| < k^n|x_0 - \alpha|$ ce qui entraine que la suite (x_n) converge vers α. On peut aussi écrire :

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1}| < k|x_n - x_{n-1}|$$

d'où $|x_{n+1} - x_n| < k^n|x_1 - x_0|$. Pour tout $p > 0$

$$|x_{n+p} - x_n| = |\sum_{i=1}^{p} x_{n+i} - x_{n+i-1}| \leq \sum_{i=1}^{p} |x_{n+i} - x_{n+i-1}| \leq (k^n + \cdots + k^{n+p-1})|x_1 - x_0|$$

d'où $|x_{n+p} - x_n| < k^n \dfrac{1}{1-k}|x_1 - x_0|$. Par passage à la limite, $|\alpha - x_n| < k^n \dfrac{1}{1-k}|x_1 - x_0|$.

Remarques. 1). L'intérêt de cette dernière inégalité est que son deuxième membre ne fait pas intervenir α qui est en général inconnu. On peut obtenir plus rapidement un résultat semblable avec $|x_n - \alpha| \leq k^n|x_0 - \alpha|$ en majorant $|x_0 - \alpha|$ par $|b - a|$.

2) On peut avoir pour une fonction $f : [a, b] \to [a, b]$, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ si $x \neq y$ sans qu'il existe $k < 1$ vérifiant $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Par exemple, si on considère $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ définie par $f(x) = \sin x$ alors $x \neq y$ implique $|\sin x - \sin y| < |x - y|$ (pourquoi ?) et comme $\sup\{|\cos x| \mid x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\} = 1$ il n'existe aucun $k < 1$ tel que $|\sin x - \sin y| < k|x - y|$ (voir la proposition 31.3).

3). Si une fonction f, de $[a, b]$ dans lui-même, vérifie $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ lorsque $x \neq y$ alors toute suite (x_n), définie par $x_0 \in [a, b]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, converge vers l'unique point fixe de f. Le réel $k < 1$ du lemme permet seulement de mesurer la rapidité de la convergence (et aussi d'obtenir une preuve plus simple).

Donnons une idée de la preuve dont les différentes étapes peuvent être :

(1) La fonction f est une application continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Elle possède donc au moins un point fixe et la relation $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ lorsque $x \neq y$ entraine son unicité.
(2) L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée est fermé. Il possède donc un plus grand élément (qui est la limite supérieure de la suite) et un plus petit (la limite inférieure).
(3) Si α est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) vérifiant la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ alors il existe une valeur d'adhérence β telle que $f(\beta) = \alpha$. En effet on a $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)}$ et la suite bornée $(x_{\varphi(n)-1})$ possède une valeur d'adhérence β : il existe

ψ tel que $\beta = \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(\psi(n))-1}$. La fonction f étant continue, $f(\beta) = \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(\psi(n))} = \alpha$ car $(x_{\varphi(\psi(n))})$ est extraite de $(x_{\varphi(n)})$ et β est une valeur d'adhérence de (x_n).

(4) Soit α_1 (resp. α_2) la plus grande (resp. petite) valeur d'adhérence de (x_n). Il existe deux valeurs d'adhérence β_1 et β_2 telles que $f(\beta_1) = \alpha_1$ et $f(\beta_2) = \alpha_2$. Si $\alpha_1 \neq \alpha_2$ alors

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |f(\beta_1) - f(\beta_2)| < |\beta_1 - \beta_2|$$

ce qui contredit la définition de α_1 et α_2. On a donc $\alpha_1 = \alpha_2$ et la suite (x_n) converge vers α_1 (une suite bornée ayant une seule valeur d'adhérence est convergente) qui est l'unique point fixe de f.

Si f n'est pas définie sur un segment alors il est possible que f n'ait pas de point fixe. Par exemple, soit f définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+1})$. Si $x \neq y$, on a

$$|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{2}(x - y + \sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1})| = |\frac{1}{2}(x-y)(1 + \frac{x+y}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}})| < |x-y|$$

mais l'équation $x = \sqrt{x^2+1}$ n'a pas de solution.

On peut remarquer que $|f'(x)| = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}) < 1$ mais qu'il n'existe aucun k tel que $|f'(x)| \leq k < 1$

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = 4 - \dfrac{1}{4}\ln x$.

(1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution α et que cette solution est dans $I =]3, 4[$.

(2) Montrer que $f(I) \subset I$ et que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{12}$.

(3) Soit (x_n) la suite définie par récurrence par :

$$x_0 \in I, \qquad x_{n+1} = f(x_n).$$

Montrer que (x_n) converge vers α et trouver une approximation de α à 10^{-5} près.

Solution abrégée.

1) La fonction $g : x \to x - f(x)$ a une dérivée > 0 sur $\mathbb{R}^{*+}$. Elle est donc strictement croissante et l'équation $g(x) = 0$ possède au plus une solution. On a $g(4) > 0$ et $g(3) < 0$ d'où l'existence d'une solution unique qui est dans $]3, 4[$.

2) La fonction f est strictement décroissante, $f(4) > 3$ et $f(3) < 4$ donc si $x \in]3, 4[$, $3 < f(4) < f(x) < f(3) < 4$.

On a $f''(x) = \dfrac{1}{4x^2} > 0$ donc f' est croissante. Si $x \in]3, 4[$ alors $-\dfrac{1}{12} = f'(3) < f'(x) < f'(4) = -\dfrac{1}{16}$ d'où $|f'(x)| < \dfrac{1}{12}$.

3) Par le lemme 31.2, la suite (x_n) converge vers α et $|x_n - \alpha| < (\dfrac{1}{12})^n |x_0 - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{12})^n$ si on prend $x_0 = 3,5$.

On a $\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{12})^n < 10^{-5}$ si et seulement si $12^n > 50000$ ce qui équivaut à $n \ln 12 > \ln 50000$. La plus petite valeur qui convient est $n = 5$ et $x_5 = 3,674637$.

Exercice 2. Etude de la suite (u_n) définie par $u_0 \neq 0$ et $u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n^2}$.

Solution. On a $u_1 > 2$ et plus généralement, pour tout entier $n > 0$, $u_n > 2$.

On a donc pour $n > 0$, $0 < \dfrac{1}{u_n^2} < \dfrac{1}{4}$ d'où $u_{n+1} < \dfrac{9}{4}$ et finalement, pour $n \geq 2$,

$$\boxed{2 < u_n < \frac{9}{4}.}$$

Introduisons la fonction f définie sur $I = [2, \frac{9}{4}]$ par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2}$. On a $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$ et $f'' = \dfrac{6}{x^4}$. La fonction f est donc strictement décroissante sur I et la fonction f' strictement croissante.

On a $f(2) = \dfrac{9}{4} \in I$ et $f(\frac{9}{4}) = 2 + \dfrac{16}{81} \in I$ d'où il résulte que $f(I) \subset I$. On a aussi, pour tout $x \in I$, $f'(2) = -\dfrac{2}{8} \leq f'(x) \leq f'(\frac{9}{4}) = -2\dfrac{4^2}{9^2}$ et donc $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.

La fonction f possède donc un unique point fixe (f continue, $f(I) \subset I$ et $|f'| < 1$) noté α et toute suite (v_n) telle que $v_0 \in I$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ converge vers ce point. C'est en particulier le cas de la suite (u_n).

Considérons les deux suites extraites de (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $v_n = u_{2n}$, $n > 0$, et $w_n = u_{2n+1}$. La fonction f^2 étant croissantes, ces deux suites sont monotones, varient en sens contraire (car f est décroissante et $f(v_n) = w_n$) et convergent vers α. Elles sont donc adjacentes.

Il est facile d'obtenir à l'aide des suites adjacentes (v_n) et (w_n) des approximations décimales de α et, par exemple, $2,205569430$ est une approximation de α à 10^{-9} près.

Remarque. Avant de chercher des approximations de α il est bon de s'assurer que α n'est pas un nombre rationnel. Supposons $\alpha = \dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ avec $p \wedge q = 1$. Le nombre α, point fixe de f, vérifie $\alpha^3 - 2\alpha^2 - 1 = 0$ d'où $p^3 - 2p^2q - q^3 = 0$. L'entier q divise p^3 et donc aussi p. Comme $p \wedge q = 1$, $q = 1$ et $p^3 - 2p^2 = 1$ ce qui montre que p divise 1 d'où $p = 1$. Le seul zéro possible dans $\mathbb{Q}^+$ de $x^3 - 2x^2 - 1$ est donc 1 et, comme il est clair que 1 n'est pas un zéro de ce polynôme, $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

La vérification précédente n'est pas souvent faite et pourtant elle peut être utile. Si par exemple on considère $g : [-7, -5] \to [-7, -5]$ définie par $g(x) = -7 + \dfrac{36}{x^2}$ alors l'étude du point fixe de cette fonction à l'aide d'une suite de la forme $u_{n+1} = -7 + \dfrac{36}{u_n^2}$ est sans intérêt car il vaut -6. Une étude analogue à la précédente montre que les seuls zéros rationnels possibles de $x^3 - 7x^2 + 36$ sont ± 6, ± 3 et ± 2.

5. Compléments

5.1. Une fonction ayant une dérivée négative est décroissante. Nous donnons ici la démonstration rigoureuse de l'inégalité des accroissement finis à partir du fait qu'une application ayant une dérivée négative est décroissante (Principe de Lagrange). La preuve de la proposition suivante est une simple adaptation de la preuve du théorème 31.1. Comme dans la preuve du théoréme 31.1, on peut seulement supposer que f possède une dérivée à droite négative sur $]a, b[$.

Proposition 31.6. *Soit f une application continue sur un segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a,b[$ alors $f(b) \leq f(a)$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons la fonction h définie sur $[a,b]$ par

$$h(x) = f(x) - f(a) - \varepsilon(x-a).$$

Si l'on montre que $h(b) \leq \varepsilon$ alors la proposition est démontrée. En effet

$$h(b) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a+1} \leq \varepsilon.$$

Si cette dernière inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$ alors elle équivaut à $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a+1} \leq 0$. Or $b-a+1 > 0$ et donc $f(b)-f(a) \leq 0$. Montrons donc que $h(b) \leq \varepsilon$.

Soit $A = \{x \in [a,b] \mid h(x) \leq \varepsilon\}$. Comme $h(a) = 0$, $a \in A$ et, la fonction h étant continue en a, il existe $d \in]a,b]$ tel que $h(d) \leq \varepsilon/2$ d'où $A \neq \{a\}$. Soit $c = \sup A \in]a,b]$. Il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers c. Pour tout n, $h(x_n) \leq \varepsilon$ et donc, la fonction h étant continue en c, $h(c) \leq \varepsilon$ d'où $c \in A$.

Supposons que $c < b$. Il existe $t \in]c,b]$ tel que $\dfrac{f(t)-f(c)}{t-c} \leq f'(c)+\varepsilon$ car $\displaystyle\lim_{x\to c, x>c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$. On a

$$f(t)-f(c) \leq (t-c)f'(c) + (t-c)\varepsilon \leq (t-c)\varepsilon.$$

Comme $c \in A$,

$$f(c)-f(a) \leq \varepsilon(c-a) + \varepsilon$$

d'où, par addition,

$$f(t)-f(a) \leq \varepsilon(t-a) + \varepsilon$$

ce qui signifie $t \in A$. C'est absurde et donc $c = b$ et $h(b) \leq \varepsilon$.

Théorème 31.2. *Soit f une application continue sur un segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a,b[$ alors*

$$\boxed{f(b)-f(a) \leq M(b-a)}$$

Preuve. La fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - Mx$ possède une dérivée négative sur $]a,b[$ et donc $g(b) \leq g(a)$ ce qui équivaut à $f(b)-f(a) \leq M(b-a)$.

5.2. L'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. A partir de l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions réelles on peut déduire assez facilement l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 31.7. *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. S'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in]a,b[$, $\| f'(x) \| \leq M$ alors*

$$\| f(b)-f(a) \| \leq M|b-a|.$$

Preuve. On désigne par $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$ et par $\| . \|$ la norme associée.

Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \langle f(b)-f(a), f(x) \rangle$. Cette fonction est dérivable sur $]a,b[$ et $g'(x) = \langle f(b)-f(a), f'(x) \rangle$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$| g'(x) | \leq \| f(b)-f(a) \| \| f'(x) \| \leq \| f(b)-f(a) \| M$$

d'où en utilisant le corollaire 31.4,

$$\mid g(b) - g(a) \mid \leq \parallel f(b) - f(a) \parallel M \mid b - a \mid .$$

Or

$$g(b)-g(a) = \langle f(b)-f(a), f(b)\rangle - \langle f(b)-f(a), f(a)\rangle = \langle f(b)-f(a), f(b)-f(a)\rangle = \parallel f(b)-f(a) \parallel^2$$

et donc

$$\parallel f(b) - f(a) \parallel \leq M \mid b - a \mid .$$

5.3. Intégration des développements limités et formule de Taylor-Young.

PROPOSITION 31.8. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dans un voisinage d'un point $a \in D_f$. Si la fonction dérivée f' possède au voisinage de a un développement limité d'ordre n*

$$f'(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

alors f possède au voisinage de a un développement limité d'ordre $n+1$ donné par

$$f(x) = f(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{(n+1)}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n$. Par définition de la relation de prépondérance, il existe un voisinage de a sur lequel $|f'(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon|(x-a)^n|$. Soit ϕ la primitive du polynôme φ telle que $\phi(a) = 0$. Si $x \geq a$ alors $|f'(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon(x-a)^n$ et, par application du corollaire 31.4 sur $[a, x]$,

$$|f(x) - \phi(x) - (f(a) - \phi(a))| \leq \varepsilon\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \leq \varepsilon(x-a)^{n+1} = \varepsilon|(x-a)^{n+1}|.$$

Si $x < a$ alors on peut faire le même calcul si n est pair et si n est impair alors $|f'(x) - \phi(x)| \leq -\varepsilon(x-a)^n$ d'où, par application du corollaire 31.4 sur $[x, a]$,

$$|f(x) - \phi(x) - (f(a) - \phi(a))| \leq \varepsilon\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \leq \varepsilon(x-a)^{n+1} = \varepsilon|(x-a)^{n+1}|.$$

On obtient la même inégalité que pour $x \geq a$ et cette inégalité signifie $f(x)-\phi(x)-(f(a)-\phi(a)) \in o((x-a)^{n+1})$, ou encore

$$f(x) = f(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{(n+1)}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Remarque. Si f posséde un développement limité d'ordre n au voisinage de a et si f est dérivable dans un voisinage de a alors il est possible, qu'au voisinage de ce point, f' ne possède pas de développement limité d'ordre $n-1$ si $n > 1$. Par exemple la fonction f, définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin\dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, possède un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 car $x^3 \sin\dfrac{1}{x} \in o(x^2)$ mais sa fonction dérivée ne possède pas de développement limité d'ordre 1 car f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Si f posséde un développement limité d'ordre n au voisinage de a et si f' possède au voisinage de ce point un développement limité d'ordre $n-1$ alors la proposition 31.8 et l'unicité du développement limité entrainent que la partie régulière de ce développement limité est la dérivée de la partie régulière du développement limité de f.

La proposition suivante montre que l'existence en un point a d'une dérivée n-ième entraine l'existence d'un développement limité d'ordre n au voisinage de ce point. La fonction f de la remarque précédente montre que la réciproque est fausse si $n \geq 2$.

PROPOSITION 31.9. *(* **Formule de Taylor-Young.** *) Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ dérivable n fois au point a. La fonction f possède au voisinage de a un développement limité d'ordre n donné par*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n).$$

Preuve. La preuve est par récurrence sur l'entier $n > 0$. Le résultat est vrai pour $n = 1$, voir le document 26. Supposons le résultat vrai pour toute fonction n fois dérivable au point a et soit f une fonction $(n+1)$ fois dérivable en a. La fonction f' qui est n fois dérivable en a possède le développement limité

$$f'(x) = f'(a) + (x-a)f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n+1)}(a) + o((x-a)^n).$$

Par application de la proposition 31.8, on obtient

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + o((x-a)^{(n+1)})$$

ce qui montre que le résultat est vrai à l'ordre $n+1$.