DOCUMENT 22

Isométries du plan conservant un polygone régulier.

Soit E un plan affine euclidien qui est orienté lorsque c'est nécessaire (en général, lorsqu'intervient la mesure d'un angle).

On désigne par $Is(E)$ le groupe des isométries de E et par $Is^+(E)$ son sous groupe des déplacements. Les anti-déplacements de E forment l'ensemble désigné par $Is^-(E)$.

N.B. L'absence de figures dans ce document est due à un problème technique. Il est important et utile d'en faire.

1. Résultats préliminaires sur les groupes d'isométries

1.1. Isométries conservant une partie. Soit X une partie de E. On dit qu'une application $f : E \to E$ conserve X si $f(X) = X$ et on désigne respectivement par $Is(X)$, $Is^+(X)$ et $Is^-(X)$ l'ensemble des isométries, des déplacements et des anti-déplacements qui conservent X.

Proposition 22.1. *Soit X une partie non vide de E.*

(1) *$Is(X)$ est un sous groupe du groupe $Is(E)$ et $Is^+(X)$ est un sous groupe distingué de $Is(X)$.*
(2) *Si $Is^-(X) \neq \emptyset$ alors pour tout $s \in Is^-(X)$ l'application $f_s : Is^+(X) \to Is^-(X)$ définie pour tout $h \in Is^+(X)$ par $f_s(h) = s \circ h$ est bijective et $Card(Is^+(X)) = Card(Is^-(X))$.*
(3) *Si X est fini alors tout élément de $Is(X)$ possède un point fixe, l'isobarycentre de X.*
(4) *Si X est fini de cardinal $n > 1$ alors $Is^+(X)$ est fini et $Card(Is^+(X)) \leq n$. Le groupe $Is(X)$ est fini avec $Card(Is(X)) \leq 2n$.*

1. On a $Id_E \in Is(X)$ et si $f,\ g \in Is(X)$ alors il est clair que $f \circ g^{-1}$ appartient à $Is(X)$ qui est donc un sous groupe de $Is(E)$. Comme $Is^+(X) = Is^+(E) \cap Is(X)$, $Is^+(X)$ est un sous groupe de $Is(X)$ et si f est un déplacement alors, pour toute isométrie g, $g^{-1} \circ f \circ g$ est un déplacement ce qui montre que ce sous groupe est distingué.

2. Pour tout $h \in Is^+(X)$, $f_s(h) = s \circ h \in Is^-(X)$ et comme $s \circ h = s \circ h'$ implique $h = h'$, f_s est injective. Pour tout $s' \in Is^-(X)$, $s \circ (s^{-1} \circ s') = s'$ ce qui montre que f_s est surjective car $h = s^{-1} \circ s' \in Is^+(X)$.

3. Pour toute application affine f, l'image par f de l'isobarycentre de la partie finie X est l'isobarycentre de $f(X)$. Donc si f conserve X, l'isobarycentre de X est un point fixe de f.

4. Si X est fini, d'isobarycentre O, alors $Is^+(X)$ est formé de Id_E et de rotations de centre O. Comme $Card\ X = n \geq 2$, soit $A \in X$, $A \neq O$. Un élément f de $Is^+(X)$ est entièrement déterminé par $f(A) \in X$ d'où $Card\ Is^+(X) \leq n$.

La partie 2. entraine $0 \leq Card\ Is^-(X) \leq n$ et donc $1 \leq Card\ Is(X) \leq 2n$.

Remarques. 1) Si X possède un seul élément O alors $Is(X)$ est infini. C'est l'ensemble des rotations de centre O et des réflexions dont l'axe passe par O.

2) Il est possible que $Is^-(X)$ soit vide. C'est le cas par exemple si X est formé par les quatre sommets d'un parallélogramme qui n'est ni un losange ni un rectangle.

3) Si X est fini, d'isobarycentre O, alors les éléments de $Is^+(X)$ autres que Id_E sont des rotations de centre O et les éléments de $Is^-(X)$ sont des réflexions dont l'axe passe par O.

4) Si $Is^-(X) \neq \emptyset$ alors pour tout $s \in Is^-(X)$ l'application $g_s : Is^+(X) \to Is^-(X)$ définie pour tout $h \in Is^+(X)$ par $g_s(h) = h \circ s$ est bijective et donc

$$Is^-(X) = \{s \circ h \mid h \in Is^+(X)\} = \{h \circ s \mid h \in Is^+(X)\}.$$

1.2. Sous groupes d'isométries.

PROPOSITION 22.2. *Soit G un sous groupe fini d'ordre $n > 1$ de $Is(E)$, $G^+ = G \cap Is^+(E)$ et $G^- = G \cap Is^-(E)$.*

(1) *$G^- = \emptyset$ ou G^- a le même cardinal que G^+. Si $G^- \neq \emptyset$ alors pour tout $s \in G^-$,*

$$G^- = \{s \circ f \mid f \in G^+\} = \{f \circ s \mid f \in G^+\}.$$

(2) *$G^+ = \{Id_E\}$ ou G^+ est un groupe cyclique engendré par une rotation. C'est un sous groupe distingué de G.*

Preuve. La preuve de 1. est semblable a celle de la partie 2. de la proposition 22.1. Il est clair que G^+ est un sous groupe et si $G^+ \neq \{Id_E\}$ alors il est constitué de l'application identique et de rotations car toute translation de vecteur non nul engendre un sous groupe infini. Soit $M \in E$ et $X = \{f(M) \mid f \in G^+\}$. Cette partie finie de E est stable par G^+ et son isobarycentre O est un point fixe pour tout élément de G^+. Le groupe G^+ est donc un sous groupe du groupe des rotations de centre O. Or ce groupe est isomorphe au groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 par l'application qui à une rotation de centre O dont la mesure de l'angle est $\theta + 2\pi\mathbb{Z}$ fait correspondre $e^{i\theta}$. Le seul sous groupe fini d'ordre m de $\mathbb{U}$ est le groupe cyclique $\mathbb{U}_m$ des racine m-ièmes de l'unité (Voir le document " Racines n-ièmes d'un nombre complexe", fascicule 1.). Le groupe G^+ est donc lui aussi cyclique et engendré par une rotation f : $G^+ = \{Id_E = f^m, f, f^2, \ldots, f^{m-1}\}$.

S'il existe $g \in G^-$ alors pour tout $f \in G^+$, $g^{-1} \circ f \circ g \in G^+$ et G^+ est donc distingué.

Remarques. 1) $G = G^+$ ou, s'il existe $s \in G^-$ alors, en posant $H = \{Id_E, s\}$, $G = \{g \circ f \mid g \in H, f \in G^+\}$. On traduit cela en disant que G est le produit semi-direct du sous groupe H et du sous groupe distingué G^+, voir le paragraphe 5.2.

2) Si G est un sous groupe fini d'ordre impair > 1 de $Is(E)$ alors G ne contient aucune reflexion et est un groupe cyclique engendré par une rotation. Toutes les rotations de G ont le même centre.

3) Dans $\mathbb{U}$, il existe pour chaque entier n un unique sous groupe d'ordre n. De plus ce sous groupe est cyclique, c'est le groupe $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité. Le groupe des rotations de centre donné O, qui lui est isomorphe, possède aussi ces propriétés.

4) Soit $f \in Is(E)$.

- Si f est une translation de vecteur non nul ou une symétrie glissée de vecteur non nul alors le sous groupe engendré par f est infini.
- Si f est une reflexion par rapport à une droite alors le sous groupe engendré par f est d'ordre 2 (car $f^2 = Id_E$).

- Si f est une rotation alors l'application $\varphi : n \in \mathbb{Z} \to f^n$ est un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}$ sur le sous groupe G_f engendré par f. Son noyau est de la forme $n_0\mathbb{Z}$ avec $n_0 \geq 0$ et G_f est isomorphe à $\mathbb{Z}/n_0\mathbb{Z}$.

  Si $n_0 = 0$ alors φ est injective et f engendre un sous groupe infini isomorphe à $\mathbb{Z}$. Si $n_0 > 0$ alors n_0 est le plus petit entier $n > 0$ tel que $f^n = Id_E$. Si θ est une mesure de l'angle de f alors $n_0\theta = 2k\pi$ d'où $\theta = \dfrac{2k}{n_0}\pi$ et θ est de la forme $r\pi$, $r \in \mathbb{Q}$. Réciproquement, si une mesure de l'angle d'une rotation g de centre O est de la forme $\dfrac{p}{q}\pi$, $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, alors $g^{2q} = Id_E$ et le sous groupe engendré par g, G_g, est fini. Si n est son ordre alors G_g est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et à $\mathbb{U}_n$. Il est engendré par la rotation de centre O dont une mesure de l'angle est $\dfrac{2\pi}{n}$ et ses autres générateurs sont les rotations de centre O dont une mesure de l'angle est $\dfrac{2k\pi}{n}$, $1 < k < n$, k et n premiers entre eux (Les générateurs de G_g ont pour mesure de leurs angles les arguments des racines primitives n-ièmes de l'unité qui sont les générateurs de $\mathbb{U}_n$.). Comme $\mathbb{U}_n$, G_g possède $\Phi(n)$ générateurs (Φ : fonction indicatrice d'Euler).

2. Polygones réguliers : definitions et premières propriétés

Dans toute la suite, n désigne un entier ≥ 3. Cette hypothèse entraine qu'un élément d'ordre n du groupe $Is(E)$ est une rotation dont une mesure de l'angle est $\dfrac{2k\pi}{n}$, $0 < k < n$, k et n premiers entre eux.

Définition 22.1. *Une partie P de E est un polygone régulier s'il existe une rotation $r \in Is^+(E)$ d'ordre n et $M \in P$ distinct du centre de r tel que*

$$P = [Mr(M)] \cup [r(M)r^2(M)] \cup \ldots \cup [r^{n-1}(M)M].$$

On dit que la rotation r caractérise P.

Les n déplacements Id_E, r,. . . ,r^{n-1} étant distincts, il en est de même des points M, $r(M)$,..., $r^{n-1}(M)$. On désigne provisoirement leur ensemble par $\Sigma_r(P)$. On va montrer que cet ensemble peut être défini indépendemment de r.

Lemme 22.1. *Soit A et B deux points distincts d'un disque D de centre O et de rayon R. Si $M \in [AB]$ et $M \notin \{A, B\}$ alors $OM < R$.*

Considérons un repére orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j}$ colinéaires. Soit (x, y_A), (x, y_B) et (x, y) les coordonnées de A, B et M. En supposant par exemple $y_A < y_B$, on a $y_A < y < y_B$ d'où $-y_B < -y < -y_A$ et $|y| = \max(y, -y) < \max(-y_A, y_B) \leq \max(|y_A|, |y_B|)$ et donc $y^2 < \max(y_A^2, y_B^2)$. Finalement

$$OM^2 = x^2 + y^2 < (\max(y_A^2, y_B^2)) + x^2 \leq \max(OA^2, OB^2) \leq R^2.$$

Ce lemme montre que tout disque est convexe et que le polygone régulier P est contenu dans le disque limité par le cercle contenant $\Sigma_r(P)$.

LEMME 22.2. *Soit P un polygone régulier caractérisé par une rotation r de centre O. Un point S de P appartient à $\Sigma_r(P)$ si et seulement si il n'existe aucun triplet (A, B, λ) tel que A, $B \in P$, $\lambda \in]0, 1[$ et S est le barycentre de (A, λ) et $(B, 1 - \lambda)$.*

Désignons par R le rayon du cercle de centre O contenant $\Sigma_r(P)$. Soit $S \in \Sigma_r(P)$ et supposons qu'il existe un triplet (A, B, λ) tel que A, $B \in P$, $\lambda \in]0, 1[$ et S est le barycentre de (A, λ) et $(B, 1 - \lambda)$. Le lemme 25.5 entraine $OS < R$ ce qui est contradictoire.

Soit $X \notin \Sigma_r(P)$. En conservant les notations de la définition 22.1, supposons que $X \in [r^i(M)r^{i+1}(M)]$ avec $X \notin \{r^i(M), r^{i+1}(M)\}$ et $0 \leq i \leq n-1$. Il existe donc $\lambda \in]0, 1[$ tel que X soit le barycentre de $(r^i(M), \lambda)$ et $(r^{i+1}(M), 1 - \lambda)$.

L'ensemble $\Sigma_r(P)$ est donc définissable indépendamment de r et M. Il est maintenant désigné par $\Sigma(P)$ et ses éléments s'appellent les sommets du polygone régulier P. On va maintenant prouver un résultat permettant de définir les notions de sommets consécutifs et de cotés d'un polygone régulier.

LEMME 22.3. *Soit P un polygone régulier caractérisé par une rotation r d'ordre n et A,B deux sommets distincts de P. Il y a équivalence entre*

(1) *$[AB] \subset P$,*
(2) *$A = r(B)$ ou $B = r(A)$.*

La preuve de 2. $\Rightarrow$ 1. est facile à partir de la définition d'un polygone régulier.

Pour la preuve de 1. $\Rightarrow$ 2. on utilise les notations de la définition 22.1 et en particulier $P = [Mr(M)] \cup [r(M)r^2(M)] \cup \ldots \cup [r^{n-1}(M)M]$. Le segment $[AB]$ ayant une infinité de points, il en existe deux qui appartiennent a un même segment $[r^i(M)r^{i+1}(M)]$ avec $0 \leq i \leq n-1$. Les points A, B , $r^i(M)$, $r^{i+1}(M)$ sont donc alignés et, comme ils sont aussi cocycliques, $\{A, B\} = \{r^i(M), r^{i+1}(M)\}$. Finalement $A = r(B)$ ou $B = r(A)$.

Deux sommets de P vérifiant les conditions équivalentes du lemme précédent sont dit consécutifs. Le segment joignant deux sommets consécutifs est un coté de P. Un polygone régulier possède autant de sommets que de cotés et leur nombre est l'ordre n de la rotation r utilisée pour définir le polygone.

Remarques. Dans toutes ces remarques P est un polygone régulier à n cotés caractérisé par une rotation r de centre O.

1). Comme r conserve $\Sigma(P)$, l'isobarycentre de $\Sigma(P)$ est invariant par r. La rotation r ayant un seul point fixe, O est l'isobarycentre de $\Sigma(P)$. On l'appelle le centre du polygone régulier P.

2) L'application qui à un coté $[Ar(A)]$ de P fait correspondre le coté $r([Ar(A)]) = [r(A)r^2(A)])$ est une bijection de l'ensemble des cotés. Tous les cotés d'un polygone régulier ont donc la même longueur. L'application qui à un sommet A fait correspondre le coté $[Ar(A)]$ est aussi une bijection. Un polygone a autant de cotés que de sommets.

3) Soit A et B deux sommets consécutifs de P. Si pour une rotation ρ d'ordre n on a

$$P = [M\rho(M)] \cup [\rho(M)\rho^2(M)] \cup \ldots \cup [\rho^{n-1}(M)M]$$

alors les lemmes 22.2 et 22.3 entraine que $A = \rho(B)$ ou $B = \rho(A)$ et donc $\rho = r$ ou $\rho = r^{-1}$. Il existe donc exactement deux rotations qui caractérisent P et l'une est l'inverse de l'autre. On peut montrer que ces deux rotations sont les seules isométries qui conservent P et qui transforment tout sommet en un sommet consécutif.

4) Pour deux sommets consécutifs A et B l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ est égal à l'angle de r si $B = r(A)$ ou à l'angle de r^{-1} si $A = r(B)$. L'angle géométrique $\widehat{AOB}$ est indépendant des sommets consécutifs A et B. On l'appelle l'angle au centre du polygone.

5) Pour une rotation ρ et un ensemble X de n points, on peut avoir $X = \rho(X)$ sans que X soit les sommets d'un polygone régulier. Par exemple dans le plan complexe si $X = \{1, j, j^2, i, ij, ij^2\}$ alors $jX = X$ (i.e. La rotation de centre O et dont une mesure de l'angle est $\dfrac{2\pi}{3}$ conserve X) et X ne forme pas les sommets d'un polygone régulier.

Proposition 22.3. *L'image par une similitude d'un polygone régulier est un polygone régulier. Deux polygones réguliers sont sempblables si et seulement si ils ont le même angle au centre. Il existe, à une similitude près, $\Phi(n)/2$ polygones régulier à n cotés (Φ: fonction indicatrice d'Euler).*

Preuve. Soit s une similitude et P un polygone régulier. En utilisant les notations de la définition 22.1 on a

$$s(P) = [s(M)s(r(M))] \cup [s(r(M))s(r^2(M))] \cup \ldots \cup [s(r^{n-1}(M))s(M)].$$

Si $s(M) = N$ alors

$$s(P) = [Ns(r(s^{-1}(N)))] \cup [s(r(s^{-1}(N)))s(r^2(s^{-1}(N)))] \cup \ldots \cup [s(r^{n-1}(s^{-1}(N)))N].$$

En posant $r' = s \circ r \circ s^{-1}$ alors r' est une rotation d'ordre n ($\rho \in Is^+(E) \to s \circ \rho \circ s^{-1}$ est un automorphisme du groupe $Is^+(E)$) et, comme $r'^k = s \circ r^k \circ s^{-1}$, $s(P)$ est un polygone régulier à n cotés avec de plus $\Sigma_{s(P)} = s(\Sigma_P)$ car les similitudes conservent les barycentres. L'angle au centre de $s(P)$ est égal à l'angle au centre de P car les similitudes conservent les angles géométriques.

Réciproquement, soit P et P' deux polygones réguliers ayant le même angle au centre. Si r et r' sont les deux rotations permettant de les caractériser au sens de la définition 22.1 alors les angles de r et r' sont égaux ou opposés. Comme r^{-1} caractérise aussi P, on peut supposer que r et r' ont le même angle. Remarquons que les rotations r et r' ont le même ordre fini n. C'est aussi l'ordre de leur angle dans le groupe des angles.

Il existe un sommet $M \in P$ et un sommet $M' \in P'$ tels que

$$P = [Mr(M)] \cup [r(M)r^2(M)] \cup \ldots \cup [r^{n-1}(M)M]$$

et

$$P' = [M'r'(M')] \cup [r'(M')r'^2(M')] \cup \ldots \cup [r'^{n-1}(M')M'].$$

Soit O le centre de P, O' le centre de P' et s la similitude directe telle que $s(O) = O'$ et $s(M) = M'$. Le rapport k de s vaut $\dfrac{O'M'}{OM}$ et de $1 = \dfrac{Or(M)}{OM} = \dfrac{O'r'(M')}{O'M'}$ on déduit $O'r'(M') = kOr(M)$. Comme de plus $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Or(M)}}) = (\widehat{\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{O'r'(M')}})$ on a $r'(M') = s(r(M))$. Par une récurrence simple, on a pour tout entier $p \geq 0$, $r'^p(s(M)) = s(r^p(M))$ et donc $r'^p(M') = s(r^p(M))$. Il en résulte que $P' = s(P)$ (car l'image d'un segment $[XY]$ par la similitude s est le segment $[s(X)s(Y)]$).

Les translations, les homothétie et les rotations étant des similitudes, il suffit pour trouver le nombre de polygones réguliers à n cotés qui ne sont pas semblables de determiner le nombre de ceux ayant un centre donné O et un sommet donné M et qui ne sont pas semblables. Toutes les rotations de centre O d'ordre n engendrent le même sous groupe G isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et

$\mathbb{U}_n$. Ce groupe possède $\Phi(n)$ générateurs, ce sont les rotations r_k ayant des angles de mesures $\dfrac{2k\pi}{n} + 2\pi\mathbb{Z}$ avec $0 < k < n$ et k premier avec n. Remarquons que $k \neq \dfrac{n}{2}$ car $n \geq 3$.

On a $r_k = r_{n-k}^{-1}$ et donc les polygones caractérisés par r_k et r_{n-k} coïncident. Maintenant si $0 < k < k' < \dfrac{n}{2}$ alors les angles géométriques de mesures $\dfrac{2k\pi}{n}$ et $\dfrac{2k'\pi}{n}$ sont distincts et donc les polygones réguliers $P = [Mr_k(M)] \cup [r_k(M)r_k^2(M)] \cup \ldots \cup [r_k^{n-1}(M)M]$ et $P' = [Mr_{k'}(M)] \cup [r_{k'}(M)r_{k'}^2(M)] \cup \ldots \cup [r_{k'}^{n-1}(M)M]$ ne sont pas semblables. Finalement il existe, à une similitude près, $\Phi(n)/2$ polygones réguliers à n cotés.

Proposition 22.4. *Deux polygones réguliers à n cotés ayant le même centre et un sommet commun ont le même ensemble de sommets.*

Preuve. Soit P et P' deux polygones régulier à n cotés ayant même centre O et un sommets commun M. Si r et r' sont deux rotations de centre O et d'ordre n qui caractérisent P et P' alors $\Sigma(P) = \{r^k(M) \mid 0 \leq k \leq n-1\} = \{f(M) \mid f \in G\}$ où G désigne le sous groupe d'ordre n engendré par r. Comme il existe qu'un seul sous groupe d'ordre n dans le groupe des rotations de centre O, $\Sigma(P) = \Sigma(P')$.

Exemple. On considère le cas $n = 7$. Il existe $\Phi(7)/2 = 3$ polygones réguliers à sept cotés non semblables. En conservant les notations de la proposition 22.3, on note $r = r_1$ et on remarque que $r_2 = r^2$, $r_3 = r^3$ d'où un exemple de chacun d'eux en notant $M_i = r^i(M)$, $1 \leq i \leq 6$:

- $P_1 = [MM_1] \cup [M_1M_2] \cup [M_2M_3] \cup [M_3M_4] \cup [M_4M_5] \cup [M_5M_6] \cup [M_6M]$,
- $P_2 = [MM_2] \cup [M_2M_4] \cup [M_4M_6] \cup [M_6M_1] \cup [M_1M_3] \cup [M_3M_5] \cup [M_5M]$,
- $P_3 = [MM_3] \cup [M_3M_6] \cup [M_6M_2] \cup [M_2M_5] \cup [M_5M_1] \cup [M_1M_4] \cup [M_4M]$.

3. Isométries conservant un polygone régulier

La proposition suivante est importante car elle montre que la recherche des isométries qui conservent un polygone régulier est équivalente à la recherche des isométries qui conservent l'ensemble fini de ses sommets.

Proposition 22.5. *Pour tout polygone régulier P, $Is(P) = Is(\Sigma_P)$.*

Soit $f \in Is(P)$ et S un sommet de P. En utilisant la conservation par f^{-1} des barycentres et le lemme 22.2, $f(S)$ est un sommet de P. Comme Σ_P est fini et f injective, $f(\Sigma_P) = \Sigma_P$.

Soit $f \in Is(\Sigma_P)$. Montrons d'abord que f transforme deux sommets consécutifs S et $S' = r(S)$ en deux sommets consécutifs. Si $f \in Is^+(\Sigma_P)$, $f(S') = f(r(S)) = (f \circ r)(S) = (r \circ f)(S) = r(f(S))$ car r et f sont des rotations de même centre. Si maintenant, $f \in Is^-(\Sigma_P)$, $f(S') = (f \circ r)(S) = (r^{-1} \circ f)(S)$ et donc $r(f(S')) = f(S)$. Dans cette dernière partie, on a utilisé le fait que $f \circ r$ étant un anti-déplacement ayant au moins un point fixe (le centre de P) c'est une réflexion d'où $f \circ r = (f \circ r)^{-1} = r^{-1} \circ f^{-1} = r^{-1} \circ f$.

Maintenant soit $M \in P$. Le point M est le barycentre de deux sommets consécutifs avec des coefficients λ et $1 - \lambda$, $\lambda \in [0, 1]$, donc $f(M)$ aussi et $f(M) \in P$. On a $f(P) \subset P$ et comme de même $f^{-1}(P) \subset P$ (car $f^{-1} \in Is(\Sigma_P)$), $f(P) = P$.

Corollaire 22.1. *Soit P et P' deux polygones réguliers à n cotés. Les groupes d'isométries $Is(P)$ et $Is(P')$ sont isomorphes.*

Si P est de centre O et si M est l'un de ses sommets alors P' est semblable à un polygone régulier P" de centre O et dont M est un sommet. Les propositions 22.4 et 22.5 entrainent que $Is(P) = Is(P")$. Pour achever la preuve, il suffit de montrer que deux parties semblabes du plan ont des groupes d'isométries isomorphes. Soit donc $X \subset E$ et s une similitude. Si $f \in Is(X)$ alors $s \circ f \circ s^{-1} \in Is(s(X))$ et on vérifie facilement que l'application $f \in Is(X) \to s \circ f \circ s^{-1} \in Is(s(X))$ est un isomorphisme de groupe.

Remarques. 1) Le corollaire précédent résulte aussi du fait démontré ultérieurement disant que pour un polygone régulier à n cotés le groupe $Is(P)$ est isomorphe au groupe diédral d'ordre $2n$.

2) Soit $M_1M_2M_3$ un triangle équilatéral de centre M_4 et $Q = [M_1M_2] \cup [M_2M_3] \cup [M_3M_4] \cup [M_4M_1]$ une ligne brisée fermée de sommets $\Sigma_Q = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$. Le groupe $Is(Q)$ est formé par l'application identique et la reflexion d'axe $[M_2M_4]$ alors que $Is(\Sigma_Q)$ est identique au groupe des isométries qui conservent le triangle équilatéral $M_1M_2M_3$. Il est donc d'ordre 6 et différent de $Is(Q)$.

3) L'application qui à un élément de $Is(P)$ fait corespondre sa restriction à Σ_P est un homomorphisme injectif du groupe $Is(P)$ dans le groupe symétrique de $\Sigma(P)$. On retrouve dans un cas particulier le théorème de Cayley : tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique (i.e. le groupe des permutations d'un ensemble).

Proposition 22.6. *Soit P un polygone régulier à n sommets caractérisé par une rotation r. Le groupe $Is^+(P)$ est le groupe cyclique d'ordre n engendré par r.*

D'après la proposition 22.5, il suffit d'étudier $Is^+(\Sigma_P)$.

Il est clair que la rotation r appartient à $Is^+(\Sigma_P)$. On a donc $\{r^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset Is^+(\Sigma_P)$. Les $n-1$ rotations $r, \dots, r^{n-1}$ étant distinctes deux à deux et différentes de l'application identique et $Is^+(\Sigma_P)$ étant au plus d'ordre n, $Is^+(\Sigma_P)$ est d'ordre n et $Is^+(P) = Is^+(\Sigma_P) = \{Id_E = r^n, r, \dots, r^{n-1}\}$.

Remarques. 1) Le groupe cyclique d'ordre n, $Is^+(P)$, est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou encore au groupe des racines n-ièmes de l'unité $\mathbb{U}_n$.

2) On remarque que si n est pair alors $(r^{\frac{n}{2}})^2 = r^n = Id_E$. La rotation $r^{\frac{n}{2}}$ est la symétrie centrale de centre O et donc P et Σ_P possède O comme centre de symétrie. Si P est caractérisé par la rotation r et si M est l'un de ses sommets alors, en posant $M_k = r^k(M)$ $(0 \leq k \leq n-1)$, on a $r^{\frac{n}{2}}(M_0) = M_{\frac{n}{2}}$ et les deux sommets M_0 et $M_{\frac{n}{2}}$ sont donc alignés avec O. Cela se généralise aux sommets M_k et $M_{k+\frac{n}{2}}$, $1 \leq k < \frac{n}{2}$, en usant de la rotation r^k.

Maintenant si n est impair alors dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ aucun élément non nul n'est son propre opposé ($2\overline{p} = \overline{0}$ entraine $2p = kn$, $k \in \mathbb{Z}$. Comme n est impair, k est pair, $k = 2k'$, d'où $p = k'n$ et $\overline{p} = \overline{0}$) et donc la symétrie de centre O n'appartient pas à $Is^+(P)$. Le polygone P ne possède aucun centre de symétrie et deux sommets distincts ne sont jamais alignés avec O. (Si par exemple, M_0 et $M_i = r^i(M_0)$ sont alignés avec O alors $(\widehat{\overrightarrow{OM}_0, \overrightarrow{OM}_i})$ est l'angle plat d'où $r^{2i} = Id_E$, ce qui est absurde.)

Proposition 22.7. *Soit P un polygone régulier à n sommets de centre O caractérisé par une rotation r et $M \in \Sigma(P)$. On pose $M_k = r^k(M)$ $(0 \leq k \leq n-1)$ et soit s la reflexion d'axe OM_0. La reflexion s appartient à $Is^-(P)$ et $Is^-(P) = \{s \circ r^k \mid 0 \leq k \leq n\} = \{r^k \circ s \mid 0 \leq k \leq n\}$.*

Comme pour la proposition précédente, on utilise $Is^-(P) = Is^-(\Sigma_P)$.

Pour $1 \leq k \leq n$, on a $s(M_k) = s(r^k(M_0)) = r^{-k}(s(M_0)) = r^{-k}(M_0) \in \Sigma_P$ d'où $s \in Is^-(P)$. L'ensemble $Is^-(P)$ est donc non vide. La proposition 22.1 et la remarque qui la suit achèvent la preuve.

Précisons la forme des éléments de $Is^-(P)$. Désignons par s_k la reflexion d'axe OM_k. Pour $1 \leq i \leq n$, on a

$$s_k(M_i) = s_k(r^{i-k}(M_k)) = r^{k-i}(s_k(M_k)) = r^{k-i}(M_k) \in P$$

et donc $s_k \in Is^-(P)$.

On a vu que si **n est impair**, toutes les droites OM_k, $1 \leq k \leq n$, sont distintes et donc dans ce cas

$$\boxed{Is^-(P) = \{s_k \mid 1 \leq k \leq n\}}$$

On a $s_1(M_i) = s_1(r^{i-1}(M_1)) = r^{1-i}(M_1) = r^{n+1-i}(M_1) = r^{n+2-i}(M_0)$.

Si **n est impair**, $n = 2p+1$, alors en particulier $s_1(M_{p+1}) = M_{p+2}$ et s_1 est aussi la réflexion par rapport à la médiatrice du coté $[M_{p+1}M_{p+2}]$. Plus généralement, chaque reflexion s_k est la reflexion par rapport à la médiatrice d'un coté.

Si **n est pair**, $n = 2p$, alors $s_k = s_{p+k}$ $(0 \leq k \leq p-1)$ car M_k, O et M_{k+p} sont alignés. Il y a donc seulement p reflexions du type s_k distinctes. Pour décrire $Is^-(P)$ dans ce cas, il faut donc trouver p autres reflexions. On sait que $Is^-(P) = \{r^k \circ s_1 \ \ 0 \leq k \leq n-1\}$ et en particulier $r \circ s_1 \in Is^-(P)$. On a $r(s_1(M_1)) = r(M_1) = M_2$ et $r(s_1(M_{p+1})) = r(s_{p+1}(M_{p+1}) = r(M_{p+1}) = M_{p+2}$. La reflexion $r \circ s_1$ a pour axe la médiatrice du coté $[M_1M_2]$ qui est aussi celle du coté $[M_{p+1}M_{p+2}]$. Il y a p reflexions distinctes de ce type, $r \circ s_1$, $r \circ s_2, \ldots, r \circ s_p$ qui ont pour axes les médiatrices des cotés $[M_1M_2], \ldots, [M_pM_{p+1}]$.

Montrons que les p reflexions $r \circ s_k$ sont distinctes des p reflexions s_k si $1 \leq k \leq p$. Pour cela prouvons qu'elles ne laissent fixe aucun point de Σ_P. Si $1 \leq k \leq p$ et $1 \leq i \leq 2p$ on a

$$r \circ s_k(M_i) = r \circ s_k \circ r^{i-k}(M_k) = r^{1-i+k} \circ s_k(M_k) = r^{1-i+k}(M_k) = r^{1-2i+2k}(M_i)$$

et, M_i est fixe si et seulement $r^{1-2i+2k} = Id_E$. L'isomorphisme entre $Is^+(P)$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ entraine que cela est réalisé si et seulement si $2k - 2i + 1 \equiv 0 \ \ [mod\, 2p]$ et cette dernière affirmation est fausse. La reflexion $r \circ s_k$ n'a aucun point fixe appartenant à Σ_P.

En résumé, pour tout polygone régulier P à n sommets de centre O le groupe $Is(P)$ est d'ordre 2n et son sous-groupe des déplacements $Is^+(P)$ est cyclique d'ordre n et donc isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Si n est impair, $Is^-(P)$ est formé des n reflexions d'axes OM_i, $1 \leq i \leq n$. Les axes de ces reflexions sont aussi les médiatrices des cotés de P. Le polygone P n'a aucun centre de symétrie.

Si n est pair, $n = 2p$, alors le centre de P est un centre de symétrie pour P et $Is^-(P)$ est formé par les p reflexions d'axes OM_k, $1 \leq k \leq p$, et les p reflexions ayant pour axes les médiatrices des cotés $[M_k, M_{k+1}]$,$1 \leq k \leq p$.

On a vu que si une partie finie X de E a n éléments , $n > 1$, alors $Card\ Is(X) \leq 2n$. On va voir que l'égalité $Card\ Is(X) = 2n$ caractérise les ensembles X qui sont des ensembles de sommets d'un polygone régulier à n cotés.

PROPOSITION 22.8. *Soit Q une partie finie du plan affine euclidien E ayant n éléments avec $n \geq 3$. Si le groupe $Is(Q)$ est d'ordre $2n$ alors Q est l'ensemble des n sommets d'un polygone régulier.*

Comme Q est fini de cardinal $n \geq 2$, le groupe des déplacements conservant Q est d'ordre n car $CardIs(Q) = 2n$ implique l'existence d'anti-déplacements conservant Q et dans ce cas $Card\, Is^+(Q) = Card\, Is(Q)/2$ (voir la proposition 22.1). Il est formé de l'application identique et de rotations ayant pour centre l'isobarycentre O de Q. Cet isobarycentre n'appartient pas à Q car sinon $Card\, Is^+(Q) \leq n - 1$.

Le groupe $Is^+(Q)$ est donc un sous groupe du groupe des rotations de centre O. Il est cyclique et engendré par une rotation $r : Is^+(Q) = \{Id_E = r^n, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$. Soit $N_1 \in Q$ et, pour $2 \leq k \leq n$, $N_k = r^{k-1}(N_1)$. On $r^n(N_1) = Id_E(N_1) = N_1$ et comme les n déplacements $r, \ldots, r^n$ sont distincts deux à deux, il en est de même pour les n points N_k et $Q = \{N_1, \ldots, N_k\}$. Comme $N_{i+1} = r(N_i)$ si $1 \leq i \leq n-1$ et $r(N_n) = N_1$, Q est formé par les sommets du polygone régulier $[N_1N_2] \cup \ldots \cup [N_{n-1}N_n] \cup [N_nN_1]$.

4. Exemples

A l'aide de l'étude précédente il est facile de décrire le groupe des isométries conservant un polygone régulier à n cotés avec $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Donnons quelques compléments.

(1) $\mathbf{n = 3}$. Dans ce cas $Card\, Is(P) = 6 = Card\, S_3$ et donc $Is(P)$ est isomorphe au groupe symétrique S_3. C'est le seul cas où cela est vrai car $2n = n!$ implique $n = 3$.
(2) $\mathbf{n = 4}$. On a $Card\, Is(P) = 8$. Comme $\Phi(4) = 2$, il n'existe, à une similitude près, qu'un seul polygone régulier à 4 cotés.
(3) $\mathbf{n = 5}$. On a $Card\, Is(P) = 10$ et comme $\Phi(5) = 4$, il existe deux polygones réguliers avec $\{M_1, \ldots, M_5\}$ pour ensemble de sommets $P = [M_1M_2] \cup [M_2M_3 \cup [M_3M_4] \cup [M_4M_5] \cup [M_5M_1]$ et $P' = [M_1M_3] \cup [M_3M_5 \cup [M_5M_2] \cup [M_2M_4] \cup [M_4M_1]$.
(4) $\mathbf{n = 6}$. On a $Card\, Is(P) = 12$ et comme $\Phi(6) = 2$, il n'y a qu'un seul polygone régulier à 6 cotés.
(5) $\mathbf{n = 7}$. On a $Card\, Is(P) = 14$, $\Phi(7) = 6$. Il y a trois polygones réguliers à 7 cotés dont la description a été faite plus haut.
(6) $\mathbf{n = 8}$. $Card\, Is(P) = 16$ et $\Phi(8) = 4$. Il y a deux polygones régulier à 8 cotés.

5. Compléments

5.1. Constructions à la règle et au compas. Le théorème de Gauss affirme que l'on peut construire à la règle et au compas les sommets d'un polygone régulier à n cotés si et seulement si $n = 2^k$, $k \geq 2$ ou si $n = 2^k p_1 \ldots p_m$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $p_1 \ldots p_m$ qui sont des nombres de Fermat premiers et distincts.

La seule difficulté est la construction du polygone régulier ayant p cotés avec p un nombre de Fermat premier car les polygones à 2^k cotés sont faciles à construire (il suffit de savoir construire une perpendiculaire et une bissectrice) et on a vu dans le document "pgcd" que si on sait construire les polygones réguliers à m et n cotés avec m et n premiers entre eux alors on en déduit facilement une construction du polygone à mn cotés à partir d'une égalité de Bezout liant m et n.

Pour $n = F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$ la construction est bien connue et pour $n = F_1 = 5$, elle figure dans le document "trinôme du second degré". Pour le polygone régulier à $F_2 = 17$ cotés, la première construction a été donnée par Gauss et il en existe une très simple due à H. W.

Richmond (1893). Ces deux constructions sont basées sur l'étude des racines 17-ièmes de l'unité mais sans que $\cos \frac{2\pi}{17}$ soit explicité.

On connait la construction du polygone régulier à $F_3 = 257$ cotés (F. J. Richelot, 1832) et pour $F_4 = 65537$ il semble que le travail reste à faire. Rappelons que l'on ne connait pas de nombre de Fermat F_n qui soit premier avec $n > 4$.

5.2. Produit semi-direct, groupe diédral. Soit P un polygone régulier à n cotés, $s \in Is^-(P)$ et H le sous-groupe $\{Id_E, s\}$. Comme tout élément de $Is^-(P)$ s'écrit de façon unique $f \circ s$ avec $f \in Is^+(P)$, on peut dire que tout élément de $Is(P)$ s'écrit de façon unique $f \circ h$ avec $f \in Is^+(P)$ et $h \in H$. Le groupe $Is(P)$ est donc en bijection avec le produit $Is^+(P) \times H$ par l'application φ définie pour tout $f \in Is^+(P)$ et tout $h \in H$ par $\varphi(f \circ h) = (f, h)$. Cette application devient un isomorphisme de groupes si on muni le produit $Is^+(P) \times H$ de la loi $(f, h)(f', h') = (f \circ h \circ f' \circ h, hh')$ car $(f \circ h) \circ (f' \circ h') = (f \circ h \circ f' \circ h) \circ (h \circ h')$ et $f \circ h \circ f' \circ h \in Is^+(P)$, $h \circ h' \in H$. Cette loi est différente de la loi produit usuelle $(f, h)(f', h') = (ff', hh')$ et n'est pas en général commutative.

On dit que $Is^+(P) \times H$ est le produit semi-direct du sous-groupe distingué $Is^+(P)$ et du sous groupe H. (La définition d'un produit semi-direct est parfois présentée de façon plus générale) Le groupe $Is(P)$ est donc isomorphe au produit semi-direct d'un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et d'un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On l'appelle le groupe diédral d'ordre $2n$, noté D_n.

Un autre exemple de produit semi-direct est le groupe symétrique S_n qui est le produit semi-direct de son sous-groupe distingué des permutations paires (le groupe alterné) et du sous-groupe $H = \{Id, t\}$, où t est une transposition quelconque.

5.3. Polygones convexes. On dit parfois que le polygone régulier à n cotés P est convexe si la mesure de son angle au centre est $\theta = \frac{2\pi}{n}$. Un problème est qu'il ne semble pas facile de justifier la terminologie en montrant que l'intérieur de P (et non pas P lui-même) est convexe.

On peut aussi dire qu'un polygone régulier P est convexe si deux cotés de P non consécutifs ont une intersection vide. La encore la preuve de la convexité ne semble pas évidente.

5.4. Polygones réguliers et racines n-ièmes de l'unité. Dans le document "Racines n-ièmes d'un nombre complexe" on a vu que les racines n-ièmes d'un nombre complexe ont pour images l'ensemble Σ des sommets d'un polygone régulier à n cotés.

A partir de la proposition **??** on voit que la rotation associée à un polygone régulier ayant Σ pour ensemble de sommets a pour écriture complexe $z \to \varpi z$ où ϖ est une racine primitive n-ième de l'unité. Deux racines primitives opposées sont associées au même polygone.

6. Que faire en 25 minutes ?

Le document précédent étant long et dense, on peut dans un exposé de 25 minutes se limiter aux points suivants.

(1) Donner sur un transparent la proposition 22.1 et faire quelques commentaires.
(2) Définition d'un polygone régulier (Définition 22.1) et de ses sommets en donnant oralement l'esprit du lemme 22.2.
(3) Enoncé commenté de la proposition 22.5.
(4) Enoncés et preuves des propositions 22.6 et 22.7. C'est la partie centrale de l'exposé.

(5) Donner sur un transparent les cas particuliers $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7, \dots.$ Faire des figures et parler des constructions à la règle et au compas.
(6) Conclure avec la proposition 22.8.

Le reste du document sera utile pour répondre aux questions.